باب 6

بکھراؤ کی پیمائش

اس باب کا مطالعہ کرنے کے بعد آپ اس قابل ہو جائیں گے کہ:

- اوسطوں کے حدود سے واقف ہوں؛
- بکھراؤ کی پیمائش کی ضرورت کی قدر شناسی کر سکیں؛
- بکھراؤ کی مختلف پیمائشوں کا شمار کر سکیں؛
- پیمائشوں کا حساب اور ان کا موازنہ کر سکیں؛
- مطلق اور انسانی پیمائشوں کے درمیان امتیاز کر سکیں؛

1. تعارف:

پچھلے باب میں، آپ نے مطالعہ کیا کہ ڈیٹا کو ایک نمائندہ قدر میں کس طرح مجتمع کیا جاتا ہے۔ تاہم وہ قدر ڈیٹا میں موجود تغیر پذیری کا اظہار نہیں کرتی۔ اس باب میں آپ ان پیمائشوں کا مطالعہ کریں گے جو ڈیٹا کی تغیر پذیری کی مقدار کے تعین کرنے میں معاون ہوتی ہیں۔

تین دوست رام، رحیم اور ماریہ چائے کی چسکیاں لیتے ہوئے گپ شپ کر رہے تھے اپنی بات چیت کے دوران انہوں نے اپنی فیملی کی آمدنیوں کے بارے میں بات شروع کر دی رام انہیں بتاتا ہے کہ اس کی فیملی میں چار ممبر ہیں اور ہر ممبر کی اوسط آمدنی 15,000 روپے ہے۔ رحیم کہتا ہے کہ اس کی فیملی میں اوسط آمدنی یہی ہے حالانکہ ممبروں کی تعداد 6 ہے۔ ماریہ 52 بتاتی ہے کہ اس کی فیملی میں پانچ ممبر ہیں جن میں ایک کام نہیں

© NCERT not to be republished

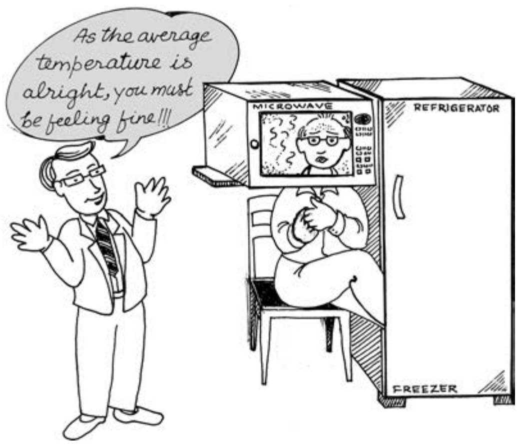
کر رہا ہے۔ وہ بھی حساب لگاتی ہے کہ اس کی فیملی کی بھی اوسط آمدنی 15,000 روپے ہے۔ ان کو تھوڑی حیرت ہوئی کیونکہ وہ جانتے تھے کہ ماریہ کے والد بہت زیادہ تنخواہ پا رہے ہیں۔ وہ اس کی تفصیلات میں گئے اور انہوں نے درج ذیل ڈیٹا اکٹھا کیا۔

فیملی کی آمدنیاں:

نمبر شمار	رام	رحیم	ماریہ
1	12,000	7,000	0
2	14,000	10,000	7,000
3	16,000	14,000	8,000
4	18,000	17,000	10,000
5	-----	20,000	50,000
6	-----	22,000	----=
کل آمدنی	60,000	90,000	75,000
اوسط آمدنی	15,000	15,000	15,000

کیا آپ غور کرتے ہیں کہ اگرچہ اوسط ایک ہے پھر بھی انفرادی آمدنیوں میں خاصا فرق ہے؟

یہ بالکل واضح ہے کہ اوسط، تقسیم کا صرف ایک پہلو یعنی



قدروں کی ایک نمائندہ سائز بتانے کی کوشش کرتا ہے۔ اسے بہتر طور پر سمجھنے کے لئے آپ قدروں کے پھیلاؤ کے بھی جاننے کی ضرورت ہوگی۔

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ رام کی فیملی میں آمدنیوں کے فرق نسبتاً کم ترین ہیں۔ رحیم کی فیملی میں یہ فرق زیادہ ہے اور ماریہ کی فیملی میں بہت ہی زیادہ۔ اس طرح صرف اوسط کی واقفیت ہونا کافی نہیں ہے۔ اگر آپ کے پاس ایسی کوئی دوسری قدر ہے جو قدروں میں تغیر کی مقدار ظاہر کرتی ہے تب آپ کی تقسیم کی فہم زیادہ بہتر ہوگی۔ مثال کے لیے فی کس آمدنی صرف اوسط آمدنی ظاہر کرتی ہے۔ انتشار کی پیمائش آپ کو آمدنی کی نامساوات بتا سکتی ہے اس سے آپ کو سماج کے مختلف طبقات کی نسبتی یا اضافی معیار زندگی کو سمجھنے میں بہتری پیدا ہوگی۔ بکھراؤ (Dispersion) تقسیم کی قدروں میں وہ حد ہے جو تقسیم کی اوسط سے متفرق ہوتی ہے۔

تغیر کی حد کی مقدار کے تعین کے لئے کچھ مخصوص پیمائش ہیں جو کہ درج ذیل ہیں:

(1) وسعت (Range)

(2) کوارٹائل انحراف (Quartile Deviation)

(3) وسطی انحراف (Mean Deviation)

(4) معیاری انحراف (Standard Deviation)

ان پیمائشوں کو جو کہ عددی قدر دیتی ہیں، کہ علاوہ بکھراؤ کا تخمینہ کرنے کے لئے گرافی طریقہ بھی ہوتا ہے۔

© NCERT not to be republished

رینج اور کوارٹائل انحراف بکھراؤ کی پیمائش اس پھیلاؤ کو شمار کرنے کے ذریعہ جو کہ قدروں میں واقع ہوتی ہے، کرتے ہیں، وسط انحراف اور معیاری انحراف ان قدروں کی حد کا شمار رکھتے ہیں جو اوسط مختلف ہوتی ہے۔

2. قدروں کے پھیلاؤ پر مبنی پیمائش:

رینج (R) تقسیم میں سب سے بڑی قدر (L) اور سب سے چھوٹی قدر (S) کے درمیان فرق ہے۔

اس طرح، $R = L - S$

سرگرمیاں:

درج ذیل قدروں پر ایک نظر ڈالیں:

20 30 40 50 200

= رینج کا شمار کیجئے

= اگر ڈیٹا سیٹ میں قدر 200 موجود نہیں ہے تب رینج کیا ہوگی

= اگر 50 کو 150 کے عوض رکھا جاتا ہے تب رینج کیا ہوگی؟

رینج توضیحات:

منتہائی قدروں سے رینج ضرورت سے زیادہ متاثر ہوتی ہے۔ یہ سبھی قدروں پر نہیں مبنی ہوتی، جب تک کم ترین اور بیش ترین قدریں تبدیل نہیں ہوتیں۔، دیگر قدریں کسی بھی تبدیلی رینج پر اثر انداز نہیں ہوتی۔ اس کا شمار غیر محدود (Open ended) تواتری تقسیم کے لئے نہیں کیا جا سکتا۔

رینج کی سب سے اونچی قدر اونچے بکھراؤ کی دلالت کرتی ہے اور رینج کی سب سے نیچی قدر کم بکھراؤ کی دلالت کرتی ہے۔

بعض حدوں کے باوجود، رینج کو اس کے سہل ہونے کے سبب اکثر سمجھا اور استعمال کیا جاتا ہے۔ مثال کے لئے ہم اپنے ٹی وی اسکرین پر تقریباً روز مختلف شہروں کے زیادہ سے زیادہ اور کم سے کم درجہ حرارت دیکھتے ہیں اور ان میں بدلتے ہوئے درجہ حرارت کے بارے میں اندازہ قائم کرتے ہیں۔

غیر محدود تقسیم وہ ہے جس میں سب سے نچلی کلاس کی نہ تو نچلی حد نہ ہی سب سے اونچی کلاس کی اوپری حد یا دونوں کی صراحت نہیں ہوتی۔

سرگرمی

اخبار سے تقریباً 52 ہفتے کے اونچے/نیچے 10 کمپنیوں کے ڈیٹا جمع کیجئے۔ شیئر قیمتوں کی رینج شمار کیجئے۔ کون سے اسٹاک پر زیادہ تلون اور کون سے پر زیادہ مستحکم ہے۔

کوارٹائل انحراف:

تقسیم میں انتہائی طور پر اونچی یا نیچی قدر کی موجودگی بھی بکھراؤ کی پیمائش کے طور پر رینج کی افادیت کو کم کرسکتی ہے۔ اس طرح آپ کو ایک ایسی پیمائش کی ضرورت ہوگی جو منفصل (Out lier) کے ذریعہ ضرورت سے زیادہ یا بے جا طور پر نہ متاثر ہو۔

ایسی صورتحال میں اگر پورے ڈیٹا کو چار مساوی حصوں میں تقسیم کیا جاتا ہے تب ہر ایک 25% قدروں پر مشتمل ہوگا۔ ہم کوارٹائل اور وسطانیہ کی قدریں حاصل کرتے ہیں۔ (آپ ان کے بارے میں پہلے ہی باب 5 میں پڑھ چکے ہیں)۔

© NCERT not to be republished

اوپری اور نچلے کوارٹائل (علی الترتیب Q_3 اور Q_1) کا استعمال بین کوارٹائل رینج کا شمار کرنے کے لئے کیا جاتا ہے جو کہ $Q_3 - Q_1$ ہے۔

بین کوارٹائل رینج تقسیم میں قدروں کی وسط 50% پر مبنی ہے اور اس لیے منتہائی قدروں کا اثر نہیں پڑتا۔ بین کوارٹائل رینج کے نصف کو کوارٹائل کل انحراف کہا جاتا ہے۔

$$Q.D. = \frac{Q_3 - Q_1}{2}$$

Q.D کو اس لیے نصف بین کوارٹائل کی رینج کہا جاتا ہے۔

غیر گروپ بند ڈیٹا کے لیے رینج اور Q.D. کا شمار کیجئے۔

مثال 1

درج ذیل مشاہدات کا رینج اور Q.D. شمار کیجئے

20, 25, 29, 30, 35, 39, 41,

48, 51, 60, 70

واضح طور پر رینج ہے 50 = 70–20

Q.D کے لئے ہمیں Q3 اور Q_1 کی قدروں کے شمار کی ضرورت ہے۔

Q_1 $\frac{n+1}{4}$ ویں قدر کی سائز Q_1 ہے

11n ہونے سے

Q_1n تیسری قدر کی سائز ہے

چونکہ قدریں پہلے ہی صعودی ترتیب میں مرتب ہوتی ہیں، یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ Q_1 یہ تیسری قدر 29 ہے (اگر یہ قدریں مرتب نہیں ہیں تو پھر آگے کیا کریں گے؟)

اس طرح، Q_3 یہ $\frac{3(n+1)}{4}$ ویں قدر کی سائز ہے

یعنی 9 ویں قدر جو کہ 51 ہے۔

لہٰذا Q3 =51

$$Q.D = \frac{Q_3 - Q_1}{2} = \frac{51-29}{2} = 11$$

کیا آپ غور کرتے ہیں کہ Q.D وسطانیہ سے کوارٹائل کا اوسط فرق ہے۔

سرگرمی

- وسطانیہ معلوم کیجیے؟
- کیا درج بالا بیان صحیح ہے؟ تصدیق کیجئے

مثال 2

40 طلباء کی کلاس کے ذریعہ حاصل کیے گئے مارکس کی درج ذیل کی تقسیم کے لئے رینج اور Q.1 کا شمار کیجئے۔

جدول 6.1

کلاس وقفے	طلباء کی تعداد
C1	(f)
0–10	5
10–20	8
20–40	16
40–60	7
60–90	4
	40

رینج محض اونچی کلاس کی اوپری اور نچلی کلاس کی حد کے درمیان فرق ہے۔ لہٰذا رینج 90=0 – 90، Q.D. (کوارٹائل

© NCERT not to be republished

انحراف) کے لیے پہلے مجموعی تواترات درج ذیل کے مطابق شمار کیجئے۔

کلاس وقفے	تواترات	مجموعی تواترات
C1	f	c.f
0-10	5	05
10-20	8	13
20-40	16	29
40-60	7	36
60-90	4	40

n=40

مسلسل سیریز میں $(\frac{n}{4})^{ta}$ قدر کی سائز Q_1 ہے اس طرح یہ 10 ویں قدر کی سائز ہے۔10 ویں قدر پر مشتمل کلاس 20 – 10 ہے لہذا .Q کلاس 20 – 10 میں واقع ہے اب ,Q کی بالکل درست قدر کا شمار کیجئے، درج ذیل فارمولے کا استعمال کیا جاتا ہے۔

$$Q_1 = L + \frac{\frac{n}{4} - cf}{f} \times 1$$

یہاں L =10 (متعلقہ کوارٹائل کلاس کی نچلی حد ہے

C.f. = 5 (کوارٹائل کلاس کی پیش رو کلاس کے لئے کی قدر)

i =10 (کوارٹائل کلاس کا وقفہ)

f=8 (کوارٹائل کلاس کا تواتر)

اس طرح

$$Q=10+\frac{10-5}{8} x10=16.25$$

اسی طرح Q_3 $(\frac{3n}{4})^{th}$ قدر کی سائز Q3 ہے۔

قدر یعنی 30 ویں قدر جو کلاس 60 – 40 کلاس میں واقع ہیں۔ اب Q_3 کے لئے فارمولے کا استعمال کرتے ہوئے اسے درج ذیل طور پر شمار کیا جاسکتا ہے۔

$$Q_3 = L + \frac{\frac{3n}{4} - c.f}{f} \times i$$

$$Q_3 = 40 + \frac{30 - 29}{7} \times 20$$

$$Q3 = 42.87$$

$$Q.D = \frac{42.87 - 16.25}{2} = 13.31$$

اگر پورے گروپ کو دو مساوی نصف میں تقسیم کیا جاتا ہے

> thاور مجرد/امتیازی انفرادی $(\frac{n+1}{4})^{th}$ ویں قدر کی سائز Q_1 ہے۔ لیکن مسلسل تقسیم میں یہ $(\frac{n}{4})^{th}$ قدر کی سائز ہے اسی طرح Q 3 اور وسطانیہ کے لئے بھی n کا استعمال (n+1) کی جگہ پر کیا جاتا ہے۔

اور ہر نصف کے لئے وسطانیہ کا شمار کیا جاتا ہے تو آپ کے پاس بہت اچھے طلباء کا وسطانیہ اور کمزور طلباء کا وسطانیہ ہوگا۔ یہ وسطانیے کسی اوسط 13.31.5 کے ذریعہ پورے گروپ کے وسطانیہ سے مختلف ہوں گے۔ اسی طرح مان لیں کہ آپ کے پاس کسی شہر کے لوگوں کی آمدنیوں کے بارے میں ڈیٹا موجود ہے تب بھی لوگوں کی وسطانیہ آمدنی کا شمار کیا جاسکتا ہے۔ اگر سبھی لوگوں کو امیر اور غریب کے دو مساوی گروپوں میں تقسیم کیا جاتا ہے تب دونوں گروپوں کے وسطانیوں کا شمار کیا جاسکتا ہے

© NCERT not to be republished

کوارٹائل انحراف میں آپ کو پورے گروپ کے وسطانیے سے امیر سے متعلق گروپ اور غریب سے متعلق گروپ کے وسطانیوں کے درمیان اوسط فرق بتائے گا۔

کوارٹائل انحراف کو عام طور پر غیر مقررہ تقسیم کے لئے شمار کیا جاتا ہے۔ اور یہ منتہائی قدروں کے ذریعہ بیجا متاثر نہیں ہوتا۔

3. اوسط سے بکھراؤ کی پیمائش

یاد کریں کہ بکھراؤ کی تعریف ان قدروں کی حد کے طور پر کی گئی تھی جو ان کی اوسط سے متفرق ہوتی ہے۔ رینج اور کوارٹائل انحراف یہ شمار کرنے کی سعی نہیں کرتے کہ انکی اوسط سے قدریں کتنی متفرق ہیں۔ تاہم قدروں کے پھیلاؤ کو شمار کرنے کے ذریعے یہ انتشار کے بارے میں اچھا تصور عطا کرتی ہیں۔ دو پیمائشیں جو قدروں کے ان کے اوسط سے انحراف پر مبنی ہوتی ہیں وہ وسط انحراف اور معیاری انحراف ہیں۔

چونکہ اوسط ایک مرکزی قدر ہے ،بعض انحرافات مثبت ہوتے ہیں اور بعض منفی۔

اگر انہیں ایسے ہی شامل کرلیا جائے جیسے کہ یہ ہیں تب جمع سے کچھ پتہ نہیں چلے گا۔ درحقیقت حسابی وسط سے انحرافات کی جمع ہمیشہ صفر ہوتی ہے۔ قدروں کے دو سیٹ پر ایک نظر ڈالیں۔

سیٹ A: 5 9 16

سیٹ B: 1 9 20

آپ دیکھ سکتے ہیں کہ سیٹ B میں قدریں اوسط سے زیادہ دور ہیں اور اس بنا پر سیٹ A میں قدروں کی نسبت زیادہ منتشر ہوں گی۔ حسابی وسط سے انحرافات کا شمار کیجئے۔ اور ان کا خلاصہ کیجئے۔

آپ کیا غور کرتے ہیں؟ اسے وسطانیہ کے ساتھ دہرایئے کیا آپ شمار کی گئی قدروں سے تغیر کی مقدار پر تبصرہ کر سکتے ہیں۔

وسط انحراف، انحرافات کی علامتوں کو نظر انداز کرنے کے ذریعہ اس مسئلے کو حل کرنے کی کوشش کرتا ہے۔ یعنی سبھی انحرافات مثبت پر غور کرتا ہے۔ معیاری انحراف کے لئے، انحرافات کو پہلے مربع کیا جاتا ہے اور اوسط نکالی جاتی ہے اور اس کے بعد اوسط کا جذر مربع (Square root) دریافت کیا جاتا ہے اب ہم انہیں الگ الگ بیان کریں گے۔

وسط انحراف

فرض کیجئے پانچ شہروں D,C,B,A اور E کے طلباء کے لئے ایک کالج قائم کرنے کی تجویز رکھی گئی اور جو کہ سڑک کے ساتھ واقع۔ شہر سے دیگر شہروں کی دوری کلومیٹر میں اور ان شہروں کے طلباء کی تعداد درج ذیل ہے۔

شہر	شہر A سے دوری	طلباء کی تعداد
A	0	90
B	2	150
C	6	100
D	14	200
E	18	80
		620

اب اگر کالج شہر A میں واقع ہے۔ کالج پہونچنے کے لئے

© NCERT not to be republished

ہر ایک کو 2 کلومیٹر سفر کرنا ہوگا۔ (کل 300 کلومیٹر)۔ مقصد یہ ہے کہ ایسے وقوع کو دریافت کیا جائے کہ طلباء کے ذریعہ سفر کی جانے والی اوسط دوری کم ترین ہو۔ (چونکہ آپ مشاہدہ کر سکتے ہیں کہ طلباء کو اوسطاً زیادہ سفر کرنا ہوگا اگر کالج شہر A یا E میں واقع ہو جب کہ دوسری طرف اگر یہ کہیں وسط میں ہو تب اسے ممکن ہے کم سفر کرنا پڑے۔ سفر کی گئی اوسط دوری کا شمار وسط انحراف کے ذریعہ شمار کیا جاتا ہے۔ جو کہ بلا شبہ قدروں کا ان کی اوسط سے فرق کا حسابی اوسط ہوگا۔

سرگرمیاں

- اگر کالج شہر A، شہر E میں واقع ہو اور اگر یہ A اور E کے درمیان بالکل آدھے راستے پر واقع ہو تو طلباء کے ذریعہ سفر میں طے کی گئی کل دوری شمار کیجئے۔
- فیصلہ کیجئے کہ آپ کے خیال میں کالج کہاں قائم کیا جانا چاہئے اگر ہر قصبے میں صرف ایک طالب علم ہو تو کیا آپ کے جواب میں تبدیلی آتی ہے؟

غیر گروپ بند ڈیٹا کے لئے حسابی اوسط سے وسط انحراف (Mean Deviation) کا شمار کیجئے۔

راست طریقہ:

مرحلے:

(i) قدروں کے حساب اوسط کا شمار کیا جاتا ہے۔

(ii) ہر قدر اور حسابی اوسط (A.M.) کے درمیان فرق کو شمار کیا جاتا ہے۔

(iii) ان فرق کے حساب وسط (انحرافات کہا جاتا ہے) وسط انحراف ہے۔

یعنی $M.D. = \frac{\Sigma|d|}{n}$ 9

مثال 3

درج ذیل قدروں 9 اور 2,4,7,8 کے اوسط انحراف کا شمار کیجئے۔

$$A.M. = \frac{\Sigma X}{n} = 6$$

$\|d\|$	X
4	2
2	4
1	7
2	8
3	9
12	

$$M.D_{(\bar{x})} = \frac{12}{5} = 2.4$$

مفروضہ اوسط طریقہ:

ایک مفروضہ اوسط سے انحرافات کو شمار کرنے کے ذریعہ بھی وسط انحراف کو شمار کیا جاسکتا ہے۔ یہ طریقہ خاص طور پر اس وقت اپنایا جاتا ہے جب حقیقی وسط ایک کسری عدد ہو۔ (خیال رکھیں کہ مفروضہ اوسط حقیقی اوسط کے قریب تر ہو)۔

© NCERT not to be republished

مثال 4

$\lvert d \rvert$	X
5	2
3	4
0	7
1	8
2	9
11	

ایسے معاملے میں درج ذیل فارمولے کا استعمال کیا جاتا ہے۔

$$M.D._{(\bar{x})} = \frac{\Sigma \lvert d \rvert + (\bar{x} - A\bar{x})(\Sigma f_B - \Sigma f_A)}{n}$$

یہاں $\Sigma \lvert d \rvert$ مفروضہ اوسط سے لیے گئے مطلق انحرافات کی جمع ہے

$\bar{x}$ حقیقی اوسط ہے

$A.\bar{x}$ مفروضہ اوسط ہے انحرافات شمار کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

Σf_B حقیقی اوسط کے نیچے کی قدروں بشمول حقیقی وسط کی تعداد ہے۔

Σf_A حقیقی وسط کے اوپر کی قدروں کی تعداد ہے۔

$$MD._{(x)} = \frac{11 + (6-7)(2-3)}{5} = \frac{12}{5} = 2.4$$

غیر گروپ بند ڈیٹا کے لئے وسطانیہ سے وسط انحراف راست طریقہ:

مثال 3 میں قدروں کا استعمال کرتے ہو وسطانیہ سے وسط انحراف (M.P.) کا شمار درج ذیل طور پر کیا جا سکتا ہے۔

(i) وسطانیہ کا شمار کیجئے جو کہ 7 ہے۔

(ii) وسطانیہ سے مطلق انحرافات شمار کیجئے۔ انہیں Idl کے طور پر ظاہر کیجئے۔

(iii) ان مطلق انحرافات کی اوسط دریافت کیجئے۔ یہ وسط انحراف ہے۔

مثال 5

X-وسطانیہ

$\lvert d \rvert$	X
5	2
3	4
0	7
1	8
2	9
11	

وسطانیہ سے اس طرح M.D (وسطانیہ انحراف) ہے۔

$$M.D._{\text{وسطانیہ}} = \frac{\Sigma \lvert d \rvert}{n} = \frac{11}{5} = 2.2$$

مختصر طریقہ

وسط انحراف مختصر یا فوری طریقے کے ذریعے شمار کرنے کے لئے قدر (A) کا استعمال انحرافات شمار کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اور درج ذیل فارمولے کا اطلاق ہوتا ہے۔

$$M.D._{\text{وسطانیہ}} = \frac{\Sigma \lvert d \rvert + (\text{وسطانیہ} - A)(\Sigma f_B - \Sigma f_A)}{n}$$

جہاں A = مستقلہ جس سے انحرافات کا شمار کیا جاتا ہے

(دیگر علامتی اظہار یا ترقی میں ہیں جو مفروضہ وسط طریقے میں

© NCERT not to be republished

دیئے گئے ہیں)

مسلسل تقسیم کے لئے وسط سے وسط انحراف:

جدول 6.2

کمپنیوں کے منافع (لاکھ روپیوں میں) کلاس وقفے	کمپنیوں کی تعداد تواترات
10–20	5
20–30	8
30–50	16
50–70	8
70–80	3
	40

مرحلے:

(i) تقسیم کا وسط شمار کیجئے۔

(ii) وسط سے کلاس کے وسطی نقاط کے مطلق انحرافات کا $|d|$ شمار کیجئے۔

(iii) ہر $|d|$ قدر کو اس کے مطابق تواتر کے ساتھ ضرب کریں تا کہ f $|d|$ قدریں حاصل کرسکیں۔ $\Sigma f\,|d|$ حاصل کرنے کے لئے مختصر کریں۔

(iv) درج ذیل فارمولے کا اطلاق کریں۔

$$M.D._{(\bar{x})} = \frac{\Sigma f\,|d|}{\Sigma f}$$

جدول 6.2 میں تقسیم کے وسط انحراف کو درج ذیل طور پر شمار کیا جاسکتا ہے۔

مثال 6

C.I	f	m.p.	$\|d\|$	$f\|d\|$
10-20	5	15	25.5	127.5
20-30	8	25	15.5	124.0
30-50	16	40	0.5	8.0
50-70	8	60	19.5	156.0
70-80	3	75	34.5	103.5
	40			519.0

$$M.D._{(\bar{x})} = \frac{\Sigma f\,|d|}{\Sigma f} = \frac{519}{40} = 12.975$$

جدول 6.2 میں قدروں کے لے $A\bar{x} = 40$ لیتے ہوئے M.D (وسط انحراف) کو درج ذیل طور پر شمار کیا جاسکتا ہے۔

وسطانیہ سے وسط انحراف

جدول 6.3

کلاس وقفے	تواترات
20-30	5
30-40	10
40-60	20
60-80	9
80-90	6
	50

وسطانیہ سے وسط انحراف شمار کرنے کا طریقہ وہی ہے وسط سے M.D کے معاملے میں ہے سوائے ان انحرافات کے جو وسطانیہ سے لیے جاتے ہیں جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔

© NCERT not to be republished

مثال 7

$f\|d\|$	$\|d\|$	m.p.	f	C.I
125	25	25	5	20-30
150	15	35	10	30-40
0	0	50	20	40-60
180	20	70	9	60-80
210	35	85	6	80-90
665			50	

$$\text{M.D.}\ \text{وسطانیہ} = \frac{\Sigma f\,|d|}{\Sigma f}\ \frac{665}{50} = 13.3$$

وسط انحراف: توضیحات

وسط انحراف سبھی قدروں پر مبنی ہے۔ ایک قدر میں بھی تبدیلی اس پر اثر کرے گی۔ یہ کم ترین (اقل) ہے جب وسطانیہ سے شمار کیا جاتا ہے یعنی یہ اعظم ہوگا اگر وسط سے شمار کیا جاتا ہے۔ تاہم یہ انحرافات کی علامتوں کو نظر انداز کرتا ہے اور غیر مقررہ تقسیم کے لئے شمار نہیں کیا جاسکتا ہے۔

معیاری انحراف (Standard Deviation)

درمیانہ (Mean) سے مربعی انحراف کے درمیانہ کا مثبت جذر المربع معیاری انحراف ہوتا ہے۔ لہذا اگر پانچ قدریں X_1, X_2, X_3, X_4 اور X_5 ہیں تب پہلے انکے وسط (درمیانیہ) کو شمار کیا جاتا ہے اس کے بعد وسط سے قدروں کے انحرافات کا شمار کیا جاتا ہے۔ ان انحرافات کو تب مربع بنایا جاتا ہے۔ ان مربع انحرافات کی وسط تغیری ہے تغیر کا مثبت جذر المربع معیاری انحراف ہے۔

(نوٹ کیجئے کہ معیاری انحراف کا شمار صرف وسط کی بنیاد پر کیا جاتا ہے)

غیر گروپ بند ڈیٹا کے معیاری انحراف کا شمار:

انفرادی قدروں کے لئے معیاری انحراف کے شمار کے لئے چار متبادل طریقے دستیاب ہیں۔ یہ سبھی طریقے معیاری انحراف کی وہی قدر دیتے ہیں۔ یہ ہیں:

(i) حقیقی وسط طریقہ

(ii) مفروضہ وسط طریقہ

(iii) راست طریقہ

(iv) زینہ دار انحراف طریقہ

حقیقی وسط کے بجائے دیگر قدر سے انحرافات کی جمع صفر کے مساوی نہیں ہے۔

حقیقی وسط طریقہ:

بالفرض آپ کو درج ذیل قدروں کے معیاری انحراف کا شمار کرنا ہے۔

5, 10, 25, 30, 50

مثال 8

d^2	d	x
361	–19	5
196	–14	10
1	+1	25
36	+6	30
676	+26	50
1270	0	

© NCERT not to be republished

درج ذیل فارمولے کا استعمال کیا جاتا ہے۔

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1270}{5}} = \sqrt{254} = 15.937$$

اس قدر پر کیا آپ غور کرتے ہیں جس سے انحرافات کا شمار درج بالا مثال میں کیا گیا ہے؟

کیا یہ حقیقی وسط ہے؟

مفروضہ وسط طریقہ

اسی قدر کے لئے انحرافات کا شمار کسی اختیاری قدر $A\bar{x}$ جیسے $d = x - A\bar{x}$ سے کیا جاسکتا ہے۔ $A\bar{x} = 25$ لیتے ہو۔ معیاری انحراف کا شمار نیچے دکھایا گیا ہے۔

مثال 9

d^2	d	x
400	–20	5
225	–15	10
0	0	25
25	+5	30
625	+25	50
1275	–5	

معیاری انحراف کے لئے فارمولا

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1275}{5} - \left(\frac{-5}{5}\right)^2} = \sqrt{254} = 15.937$$

حقیقی اوسط کے سوا قدر سے لی گئی انحراف کی جمع صفر کے مساوی ہوتی ہے۔

راست طریقہ:

معیاری انحراف کو سیدھے طور پر قدروں سے بھی شمار کیا جاسکتا ہے۔ یعنی مشاہدات لئے بغیر، جیسا کہ نیچے دکھایا گیا ہے۔

مثال 10

x^2	x
25	5
100	10
625	25
900	30
2500	50
4150	120

یہ صفر سے انحرافات لینے کی یہ مقدار ہے۔

درج ذیل فارمولے کا استعمال کیا جاتا ہے۔

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma x^2}{n} - (\bar{x})^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{4150}{5} - (24)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{254} = 15.937$$

> معیاری انحراف مستقلہ (Constant) جس سے انحراف کا شمار کیا جاتا ہے اس کے ذریعہ نہیں متاثر ہوتا۔ مستقلہ کی قدر معیاری انحراف فارمولے میں نہیں ظاہر ہوتی ہے اس طرح معیاری انحراف مبدا (Origin) سے آزاد ہوتا ہے۔

© NCERT not to be republished

زینہ وار انحراف طریقہ

اگر قدریں مشترک جزوضربی کے ذریعے قابل تقسیم ہوں، تب انہیں اس طرح تقسیم کیا جاسکتا ہے۔ اور معیاری انحراف کا شمار حاصل قدروں سے درج ذیل طور پر کیا جاسکتا ہے۔

مثال 11

چونکہ جزوضربی 5 کے ذریعہ سبھی پانچ قدریں قابل تقسیم ہیں، اس لئے ہم تقسیم کرتے ہیں اور درج ذیل قدریں حاصل کرتے ہیں۔

d^2	d	x'	x
14.44	-3.8	1	5
7.84	-2.8	2	10
0.04	+0.2	5	25
1.44	+1.2	6	30
27.04	+5.2	10	50
50.80	0		

(شمار میں مراحل ویسے ہی ہیں جیسا کہ حقیقی وسط طریقے میں ہے)

درج ذیل فارمولے کا استعمال معیاری انحراف کا شمار کرنے کے لئے کیا جاتا ہے۔

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d^2}{n}} \times c$$

$$x' = \frac{x}{c}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{50.80}{5}} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5$$

$$\sigma = 15.937$$

قدروں کا بدل رکھنے پر

متبادل طور پر، جزوضربی کے ذریعہ قدروں کو تقسیم کرنے کے بجائے انحرافات کو جزوضربی کے ذریعہ تقسیم کیا جاسکتا ہے معیاری انحراف کا شمار درج ذیل طور پر کیا جاسکتا ہے۔

مثال 12

d^2	d'	d	x
16	-4	-20	5
9	-3	-15	10
0	0	0	25
1	+1	+5	30
25	+5	+25	50
51		-1	

انحرافات کا شمار ایک اختیاری قدر 25 سے کیا جاتا ہے۔ 5 کے مشترک جزوضربی کا استعمال انحرافات کو تقسیم کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma d'^2}{n} - \left(\frac{\Sigma d'}{n}\right)^2} \times c$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{51}{5} - \left(\frac{-1}{5}\right)^1} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{10.16} \times 5 = 15.937$$

> معیاری انحراف پیمانے سے آزاد نہیں ہوتا۔ اس طرح اگر قدریں یا انحرافات ایک مشترک جزوضربی کے ذریعہ تقسیم کیے جاتے ہیں تب جزوضربی کی قدر کا استعمال معیاری انحراف کی قدر حاصل کرنے میں کیا جاتا ہے۔

© NCERT not to be republished

مسلسل تواتری تقسیم میں معیاری انحراف:

غیر گروپ بند ڈیٹا کی طرح معیاری انحراف (S.D) کا شمار درج ذیل طریقوں میں کسی کے ذریعہ گروپ بند ڈیٹا کے لئے کیا جاسکتا ہے۔

(i) حقیقی طریقہ وسط

(ii) مفروضہ طریقہ وسط

(iii) مرحلہ وار طریقہ انحراف

حقیقی طریقہ وسط:

جدول 6.2 میں قدروں کے لئے ،معیاری انحراف کا شمار درج ذیل طور پر کیا جاسکتا ہے۔

مثال 13

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
CI	fm	m	fm	d	fd	fd^2
10–20	5	15	75	–25.5	–127.5	3251.25
20–30	8	25	200	–15.5	–124.0	1922.00
30–50	16	40	640	–0.5	–8.0	4.00
50–70	8	60	480	+19.5	+156.0	3042.00
70–80	3	75	225	+34.5	+103.53	570.75
40		1620		011790.00		

درج ذیل مرحلے مطلوبہ ہیں:

1. تقسیم کی وسط شمار کیجئے

$$\bar{x} = \frac{\Sigma fm}{\Sigma f} = \frac{1620}{40} = 40.5$$

2. وسط سے وسطی قدروں کے انحرافات کا شمار کیجئے۔

$$d = m - \bar{x}\ (\text{col. } 5)$$

3. Fd قدریں (کالم 6) حاصل کرنے کے لئے انحرافات کو ان کے مطابق تواترات کے ساتھ ضرب دیں۔(نوٹ کریں کہ $\Sigma fd = 0$)

4. d قدروں (کالم 7) کے ساتھ 'fd' قدروں کو ضرب دینے کے ذریعہ 'fd^2' قدروں کو شمار کیجئے ۔ان دونوں کی جمع کر کے Σfd^2 حاصل کیجیے۔

5. درج ذیل فارمولے کا اطلاق کریں۔

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n}} = \sqrt{\frac{11790}{40}} = 17.168$$

مفروضہ وسط طریقہ:

مثال 13 میں قدروں کے لئے معیاری انحراف کا شمار بالفرض 40) انحرافات لینے کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔

مثال 14

1	2	3	4	5	6
CI	f	m	d	fd	fd^2
10–20	5	15	–25	–125	3125
20–30	8	25	–15	–120	1800
30–50	16	40	0	0	0
50–70	8	60	+20	160	200
70–80	3	75	+35	105	3675
	40			+20	11800

درج ذیل مرحلے مطلوبہ ہیں:

1. کلاس کے وسطی نقاط کا شمار کیجئے (Col.3)

© NCERT not to be republished

2. کسی مفروضہ وسط سے وسطی نقاط کا انحراف شمار کیجئے

$d = m - A\bar{x}$ (کالم 4) مفروضہ وسط =40

3. 'fd' قدریں (کالم 5) حاصل کرنے کے لئے مطابق تواترات کے ساتھ 'd' کی قدروں کو ضرب دیں۔ (نوٹ کریں کہ اس کالم کی کل جمع صفر نہیں ہے کیونکہ انحرافات مفروضہ اوسط سے لئے گئے ہیں)

4. 'd' قدروں (کالم 4) کے ساتھ کالم 5 میں 'fd' قدروں کو ضرب دیں تا کہ fd^2 قدریں (کالم 6) حاصل کرسکیں

Σfd^2 دریافت کریں۔

5. دریافت کریں $\frac{\Sigma fd^2}{n}$ اور $\left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2$

معیاری انحراف کا شمار درج ذیل ضابطہ (Formula) کے ذریعہ کیا جاسکتا ہے۔

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd^2}{n} - \left(\frac{\Sigma fd}{n}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{11800}{40} - \left(\frac{20}{40}\right)^2}$$

$$\sigma = \sqrt{29475} = 17.168$$

زینہ واریا مرحلہ وار انحراف طریقہ

اگر انحرافات کی قدریں کسی مشترکہ جزو ضربی سے قابل تقسیم ہوں، تب زینہ واریا مرحلہ وار انحراف طریقہ سے شمار آسان ہوجاتا ہے جیسا کہ درجہ ذیل مثال میں دکھایا گیا ہے۔

مثال 15

(1) CI	(2) f	(3) m	(4) d	(5) d'	(6) fd'	(7) fd^2
10–20	5	15	–25	–5	–25	125
20–30	8	25	–15	–3	–24	72
30–50	16	40	0	0	0	0
50–70	8	60	+20	+4	+32	128
70–80	3	75	+35	+7	+21	147
	40				+4	472

ضروری مرحلے

1. کلاس کے وسطی نقاط (کالم 3) اور اختیاری طور پر چنی ہوئی قدر سے انحرافات کا شمار کریں۔ بالکل اسی طرح جیسا کہ مفروضہ طریقہ وسط میں ہے۔ اس مثال میں انحرافات قدر 40 سے لیے گئے ہیں (کالم 4)
2. 'O' کے طور پر ظاہر کیے گئے مشترک جزو ضربی کے ذریعہ انحرافات کو تقسیم کریں۔ درج بالا مثال میں C=5 اس طرح جو قدریں حاصل کی جاتی ہیں وہ 'd' قدریں ہیں (کالم 5)
3. 'd' قدروں کو اس کے نظیری (Corresponding) 'f' قدروں (کالم 2) کے ساتھ ضرب کریں۔ اس کی 'fd' قدریں (کالم 6) سے حاصل کریں۔
4. fd'^2 قدریں (کالم 7) حاصل کرنے کے لئے 'd' قدروں کے ساتھ 'fd' قدروں کو ضرب کریں۔
5. کالم 6 اور کالم 7 میں دی گئی قدروں کی جمع $\Sigma fd'$ اور $\Sigma fd'^2$ قدروں کو حاصل کرنے کے لئے کریں۔
6. درج ذیل فارمولے کا اطلاق کریں۔

© NCERT not to be republished

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma fd'^2}{\Sigma f} - \left(\frac{\Sigma fd'}{\Sigma f}\right)^2} \times c$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{472}{40} - \left(\frac{4}{20}\right)^2} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{11.8 - 0.1} \times 5$$

$$\sigma = \sqrt{11.79} \times 5$$

$$\sigma = 17.168$$

معیاری انحراف: توضیحات

معیاری انحراف، بکھراؤ کی سب سے زیادہ استعمال کی جانے والی پیائش ہے، جو کہ سبھی قدروں پر مبنی ہے اس لئے ایک بھی قدر میں تبدیلی معیاری انحراف کی قدر پر اثر انداز ہوتی ہے۔ یہ مبدا (Origin) سے آزاد ہے لیکن پیمانے سے نہیں۔ یہ بعض جدید شماریاتی مسائل میں بھی کارآمد ہے۔

5. بکھراؤ کی مطلق اور اضافی پیائش:

تمام پیائشیں جو ابھی تک اوپر بیان کی گئی ہیں وہ بکھراؤ کی مطلق پیائش ہیں وہ قدر کا شمار کرتی ہیں جس کی تشریح کبھی کبھی مشکل ہوتی ہے۔ مثال کے لئے درج ذیل دو ڈیٹا سیٹ پر غور کریں۔

سیٹA	500	700	1000
سیٹB	100000	120000	130000

مان لیجئے سیٹ A میں جو قدریں ہیں وہ آئس کریم بیچنے والے کے ذریعہ درج کی گئی یومیہ فروخت ہیں جبکہ سیٹ B میں ایک بڑے ڈپارٹمنٹل اسٹور کی یومیہ فروخت دکھائی گئی ہے سیٹ A کے لئے رینج 500 ہے جب کہ سیٹ B کے لئے یہ 30,000 ہے۔ سیٹ B میں رینج کی قدر کہیں زیادہ ہے۔ کیا آپ کہہ سکتے ہیں کہ فروخت میں تغیر ڈپارٹمنٹل اسٹور کے لیے بہت زیادہ ہے؟ یہ آسانی سے مشاہدہ کیا جاسکتا ہے کہ سیٹ A میں سب سے اونچی قدر سب سے چھوٹی قدر سے دوگنی ہے جب کہ سیٹ B کے لئے یہ صرف 30% زیادہ ہے اس طرح مطلق پیائشیں تغیر کی حد کے بارے میں گمراہ کن تصور پیش کرسکتی ہیں خاص طور پر اس وقت جب اوسطیں نمایاں طور پر متفرق ہوں۔

مطلق پیائشوں کی دوسری کمزوری یہ ہے کہ یہ اکائیوں میں جواب دیتی ہیں جس میں اصل قدریں ظاہر کی جاتی ہیں تب انتشار بھی کلومیٹر میں ہوگا۔ تاہم اگر یہی قدریں میٹروں میں ظاہر کی جاتی ہیں تب مطلق پیائش کا جواب میٹروں میں ہوگا اور انتشار کی قدر 1000 گنا ظاہر ہوں گی۔ ان مسائل پر قابو پانے کے لئے انتشار کی اضافی پیائشیں استعمال کی جاسکتی ہیں۔ ہر مطلق پیائش کا اضافی مثیل (Counterpart) ہوتا ہے اس طرح رینج کے لئے ضریب (Coefficient) ہے جو درج ذیل طور پر شمار کیا جاسکتا ہے۔

رینج کا ضریب $\frac{L-S}{L+S}$

یہاں L = سب سے بڑی قدر۔

S = سب سے چھوٹی قدر

اسی طرح کوارٹائل انحراف کے یہ کوارٹائل انحراف کا ضریب

© NCERT not to be republished

ہے جوکہ درج ذیل طور پر شمار کیا جاسکتا ہے۔

$$\frac{Q_3 - Q_1}{Q_3 + Q_1}$$

جہاں Q_3 = تیسرا کوارٹائل

Q_1 = پہلا کوارٹائل

انحراف کے لئے یہ وسط انحراف کا ضریب ہے۔

وسط انحراف کا ضریب = $\frac{M.D.(\bar{x})}{\bar{x}}$ تا

$$\frac{M.D.(\text{وسطانیہ})}{\text{وسطانیہ}}$$

اس طرح اگر وسطی انحراف کا شمار وسط کی بنیاد پر کیا جاتا ہے، تب اس کی تقسیم وسطانیہ کے ذریعہ کی جاتی ہے۔

معیاری انحراف کے لئے اضافی پیمائش کو تغیر کا ضریب کہا جاتا ہے جس کا شمار درج ذیل طور پر کیا جاتا ہے۔

$$\frac{\text{معیاری انحراف}}{\text{حساب وسط}} \times 100$$

یہ عام طور پر فی صد اصطلاح میں ظاہر کیا جاتا ہے کہ اور انتشار کی اضافی پیمائش کے لئے اکثر استعمال کیا جاتا ہے چونکہ اضافی پیمائش اکائیوں میں جن میں قدروں کا اظہار ہوتا ہے، سے آزاد ہوتی ہیں اس لئے ان کا موازانہ مختلف گروپوں جن میں پیمائش کی مختلف اکائیاں ہوتی ہیں، ان سے الگ ہٹ کر بھی کیا جاسکتا ہے۔

7. لوریز منحنی (Lornez Curve)

بکھراؤ کی پیمائشیں جواب تک بیان کی گئی ہیں وہ بکھراؤ کی عدد قدر فراہم کرتی ہیں۔ ایک گرافی پیمائش جسے لوریز منحنی کہا جاتا ہے وہ بکھراؤ کے تخمینے کے لئے دستیاب ہے۔ آپ نے اس طرح کے بیانات سنے ہونگے:

کسی ملک کے 10% اونچے لوگ قومی آمدنی کا 50% کماتے ہیں جب کہ 20% بڑے لوگوں کا حصہ 80% ہے اس طرح کے اعداد وشمار کے ذریعہ آمدنی کی نامساوات کے بارے میں پتہ ملتا ہے لوریز منحنی کے ذریعہ تغیر پذیری کے درج کو ظاہر کرنے کے لئے مجموعی انداز میں ظاہر کی گئی معلومات کا استعمال کیا جاتا ہے یہ دو یا زیادہ تقسیم کی تغیر پذیری کے موازنے میں خاص طور پر مفید ہے۔

کمپنی کے ملازمین کی ماہانہ آمدنیاں ذیل میں دی گئی ہیں۔

جدول 6.4

آمدنیاں	ملازمین کی تعداد
0-5,000	5
5,000-10,000	10
10,000-20,000	18
20,000-40,000	10
40,000-50,000	7

Income class (1)	Midpoint (X) (2)	Frequency (f) of class (FX) (3)	Total income (4)	% of frequency (5)	% of Total income (6)
0-5000	2500	5	12500	10	1.29
5000-10000	7500	10	75000	20	7.71
10000-20000	15000	18	270000	36	27.76
20000-40000	30000	10	300000	20	30.85
40000-50000	45000	7	315000	14	32.39
	50	972500	100		

© NCERT not to be republished

لورینز منحنی تیار کرنا
(Construction of Lorenze Curve)

لوریز منحنی ہمیں، آبادی کے فیصد اور اس کے حصہ کے درمیان تعلق کو میزانی شکل میں فراہم کرتا ہے۔ پہلے ہم ہر آمدنی کے گروہ میں آبادی کا فی صد اور اس کی میزان کا شمار کریں گے اور بعد میں آبادی کی میزان اور اس کے (آبادی کے) حصہ کے میزان کا فی صد ہمیں لاریز منحنی دیتا ہے۔ مثال نمبر 16 ملاحظہ ہو۔ درج مرحلے مطلوب ہیں۔

[Col(2)÷total of Col (2)] x100

کا شمار کیجیے۔ جیسا کالم 3 میں دیا گیا ہے۔

2۔ کالم نمبر (4) کے مطابق اجتماعی تعددی فی صد شمار کیجیے۔

3۔ کلاس وسطیٰ نقطہ معلوم کریں کالم نمبر داری کے مطابق کالم 5 کے مطابق کلاس وسطیٰ نقد آمدنی کے گروہ میں ہر شخص کو اوسط آمدنی کا کس طرح اندازا لگایا جاسکتا ہے۔ کالم 5 کے مطابق کلاس وسطیٰ نقطوں کو معلوم کیجیے۔

4۔ اب آمدنی کے ہر گروہ کے حصہ (Share) کا شمار کیجیے۔ ہمیں ہر گروہ کی مجموعی اور تمام گروہ کی مجموعی آمدنی۔ ہر جماعت کی مجموعی آمدنی کی ضرورت ہے۔ کالم نمبر 2 کو کالم نمبر 5 سے ضرب کر کے حاصل ہوگی جیسا کہ کالم نمبر 6 میں دیا گیا ہے۔

5۔ کالم 7 میں دیئے گئے

[col(6) ÷ total of col (6)] x100

فارمولہ کی مدد سے فی صد حصہ (percentage share) شمار کیجیے۔

6۔ کالم 8 کے مطابق اجتماعی فی صد حصہ شمار کیجیے۔

7۔ ایک ترسیمی کاغذ (Graph Paper) لیجیے۔ شکل 6.1 کے زمطابق x محور پر تعدد کا اجتماعی فی صد [ملازمین کی تعداد] (یعنی کالم نمبر 4) اور Y محور پر متغیر کا اجتماعی فی صد لیجیے اس طرح مبدا (0,0) %0 آبادی %0 آمدنی کے حصہ کو ظاہر کرے گا جو کہ واضح ہے۔

8۔ ایک خط 100، 100 کے ساتھ (0, 0) مختطت (Coordinates) کو ملایئے حاصل شدہ خط مساوی تقسیم کا خط کہا جاتا ہے۔

شکل 'OC' خط کے طور پر اسے دکھایا گیا ہے۔

9۔ تواتر کے مطابق مجموعی فی صد کے ساتھ متغیر کے مجموعی فی صدوں کی ترمیم کیجیے۔ منحنی OAC حاصل کرنے کے لئے ان نقاط کو ملایئے۔

لورینز منحنی کا مطالعہ:

OC کو مساوی تقسیم کا خط کہا جاتا ہے چونکہ یہ ایک ایسی صورت حال کی دلالت کرتا ہے جیسے اوپری اوپری سطح کے %20 لوگ کل آمدنی کا %20 کماتے ہیں اور اوپری سطح کے %60 لوگ کل آمدنی کا %60 کماتے ہیں۔ اس خط سے منحنی OAC جتنا دور ہوگا اتنا ہی تقسیم کی غیر مساویت میں اضافہ ہوگا۔ اگر یکساں محوروں پر دو یا دو سے زیادہ منحنیاں ہیں تب جو CO خط سے زیادہ دور ہے تب وہاں سب سے زیادہ غیر مساویت (Inequality) رہے گی۔ تاہم، اگر دو یورینز منحنی ایک دوسرے کو قطع کرتے ہوں تو کوئی نتیجہ برآمد نہیں ہوگا۔

© NCERT not to be republished

7. اختتام:

اگر چہ رینج کو شمار کرنا اور سمجھنا زیادہ آسان ہے تاہم اس پر انتہائی قدروں کا بے جا اثر پڑتا ہے۔QD (کوارٹائل انحراف) انتہائی قدروں کے ذریعہ متاثر نہیں ہوتا کیونکہ یہ ڈیٹا کے صرف وسطی 50% پر مبنی ہے۔ تاہم MD اور S.D کی تشریح کرنا زیادہ مشکل ہے۔ دونوں اپنی اوسط سے قدرں کے انحراف پر مبنی ہیں۔ MD یہ اوسط کے ذریعہ انحرافات کی اوسط کا شمار کرتا ہے۔ لیکن انحرافات کی علامتوں کو نظر انداز کرتا ہے اور اسی لیے یہ غیر ریاضیاتی دکھائی دیتا ہے۔ معیاری انحراف وسط سے اوسط انحراف شمار کرنے کی سعی کرتا ہے۔ MD کی طرح یہ سبھی قدروں پر مبنی ہے اور اس کا طلاق زیادہ جدید شماریاتی مسائل میں بھی کیا جاتا ہے۔ بکھراؤ کی پیمائش کے لئے اسے بڑے پیمانے پر استعمال کا جاتا ہے۔

© NCERT not to be republished

خلاصہ

- بکھراؤ کی پیمائش کسی معاشی متغیر کی کیفیت کے بارے میں ہماری فہم کو بہتر بناتی ہے۔
- رینج اور کوارٹائل انحراف قدروں کے پھیلاؤ پر مبنی ہیں۔

MD (وسط انحراف) اور SD (معیاری انحراف) اوسط کی قدروں کے انحرافات پر مبنی ہیں۔
- بکھراؤ کی پیمائش مطلق یا اضافی ہوسکتی ہے۔
- مطلق پیمائشیں اکائیوں میں جواب فراہم کرتی ہیں جن میں ڈیٹا کا اظہار کیا جاتا ہے۔
- اگر مطلق قدر کا موازانہ کیا جائے تو اس کے مقابلے میں اضافی پیمائشیں ان اکائیوں سے آزاد ہوتی ہیں۔
- اضافی متعلقہ پیمائش اکائیوں سے آزاد ہوتی ہیں اس لیے مختلف متغیروں کے تقابل کے لیے استعمال کیا جاسکتا ہے۔
- ایک ترسیمی طریقہ جو منحنی کے انحراف کا اندازہ قائم کرتا ہے، لورینز منحنی کہلاتا ہے۔

مشقیں

1. ایک تعددی تقسیم کو سمجھنے میں بکھراؤ کی پیائش مرکزی قدر کا ایک بہتر تکملہ ہے۔ تبصرہ کیجئے۔

2. بکھراؤ کی کون سی پیائش بہتر ہے اور کس طرح؟

3. انحراف کی چند پیائشیں قیمتوں کے پھیلاؤ پر منحصر ہوتی ہے جبکہ چند مرکزی قیمت سے قیمتوں کی تبدیلی پر منحصر ہے۔ کیا آپ متفق ہیں؟

4. ایک قصبے میں 25% افراد 45,000 روپے سے زیادہ کماتے ہیں جب کہ 75% افراد 18,000 روپے سے زیادہ کماتے ہیں۔
بکھراؤ کی مطلق اور اضافی قدروں کا شمار کیجئے۔

5. ریاست کے 10 اضلاع کے لئے گیہوں کی فی ایکڑ پیداوار درج ذیل ہے:

ضلع	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
گیہوں	12	10	15	19	21	16	18	9	25	10
چاول	22	29	12	23	18	15	12	34	18	12

شمار کیجئے

(i) رینج

(ii) کوارٹائل انحراف (Q.D)

(iii) وسط کے بارے میں وسط انحراف

(iv) وسطانیہ کے بارے میں وسط انحراف

(v) وسط انحراف

(vi) کسی فصل میں زیادہ تغیر ہے۔

(vii) ہر فصل کے لئے مختلف پیائشوں کی قدروں کا موازنہ کیجئے۔

6. پچھلے سوال میں تغیر کی اضافی پیائشوں کا شمار کیجئے اور قدر ظاہر کیجئے جو کہ آپ کی رائے میں زیادہ معتبر ہے۔

© NCERT not to be republished

7. ایک بلے باز کو ایک کرکٹ ٹیم کے لئے منتخب کیا جاتا ہے ان کے پانچ پچھلے اسکوروں کی بنیاد پر X اور Y کے درمیان انتخاب کیا جاتا ہے یہ اسکور درج ذیل ہیں:
اگر ہم چاہتے ہیں تو کون سے بلے باز کو منتخب کیا جانا چاہئے۔

X	25	85	40	80	120
Y	50	70	65	45	80

(a) زیادہ رن حاصل کرنے والے کو

(b) ٹیم میں ایک زیادہ معتبر بلے باز

8. روشنی کے بلبوں دو برانڈوں کی کوالٹی کی جانچ کرنے کے لئے ان کے جلنے کے گھنٹوں کی مدت کا تخمینہ ہر برانڈ کے 100 بلبوں کے لئے درج ذیل طور پر لگایا گیا تھا۔

مدت	بلبوں کی تعداد	
(گھنٹوں میں)	برانڈ A	برانڈ B
0–50	15	2
50–100	20	8
100–150	18	60
150–200	25	25
200–250	22	5
	100	100

(i) کون سا برانڈ زیادہ مدت چلتا ہے؟

(ii) کون سا برانڈ ایسا ہے جو بھروسے کے قابل ہے۔

9. ایک فیکٹری میں 50 ورکرس کی اوسط یومیہ مزدوری 40 روپے کے معیاری انحراف کے ساتھ 200 روپے تھی۔ ہر ورکر کی مزدوری میں 20 روپے کا اضافہ ہوتا ہے۔ نئی اوسط یومیہ مزدوری اور معیاری انحراف کیا ہوگا؟ کیا مزدوریوں میں زیادہ یا کم یکسانیت ہو جائے گی۔

10. اگر پچھلے سوال میں ہر ورکر کی اجرتوں میں 10% کا اضافہ کیا جاتا ہے وسط اور معیاری انحراف قدریں کس طرح متاثر ہوں گی۔

© NCERT not to be republished

11. درج ذیل تقسیم کے لئے وسط اور معیاری انحراف کے بارے میں وسط انحراف کا شمار کیجئے۔

کلاس	تواترات
20–40	3
40–80	6
80–100	20
100–120	12
120–140	9
	50

12. قدروں کی جمع 100 ہے اور ان کے مربع کی جمع 1090 ہے تغیر کا ضریب دریافت کیجئے۔

© NCERT not to be republished