باب 13

حدوداور مشتقات
(LIMIST AND DERIVATIVES)

❖(Calculus)احصا کو ایک چابی مان کر قدرت کے روشن طریق کو سمجھانے کے لئے ریاضی کو کامیاب طریقے سے استعمال کیا جاسکتا ہے۔ وائٹ ہیڈ (White Head)❖

13.1 تعارف (Introduction)

سرآئزک نیوٹون
(1642-1727)

یہ سبق احصا (Calculus) کا تعارف ہے کیکولس ریاضی کی وہ شاخ ہے جو خاص طور پر فنکشن کی قدر کی جانکاری کی تبدیلی سے تعلق رکھتی ہے جس طرح نقاط علاقہ (Domain) میں بدلتے ہیں۔ ہم سب سے پہلے بغیر تعریف بیان کئے گئے مشتق (Derivative) کا تصور (Idea) دیتے ہیں۔ (دراصل بغیر تعریف بیان کیے ہوئے)۔ پھر ہم انتہا (Limit) کی ایک سادہ (Naive) تعریف بتاتے ہیں اور کچھ حدود کے الجبرے کے بارے میں پڑھتے ہیں۔ پھر ہم واپس مشتق کی تعریف کی طرف آتے ہیں اور مشتقات کے کچھ الجبرے کے بارے میں پڑھتے ہیں۔ ساتھ ہی ہم کچھ معیاری تفاعلات کے مشتق حاصل کرتے ہیں۔

13.2 مشتقات کا بغیر تعریف بیان کئے گئے تصور (Intutive Idea of Derivatives)

طبعیاتی تجربات نے یہ تصدیق کردی ہے کہ اگر کسی شئے یا چیز کو ایک بہت اونچی چٹان (Cliff) سے پھینکا جائے تو یہ 't' سیکنڈ میں $4.9t^2$ میٹر کا فاصلہ طے کرتی ہے۔ یعنی s فاصلہ جو اس شئے نے طے کیا ہے t کا تفاعل ہے۔ اور اس طرح دیا گیا ہے

$$s = 4.9t^2$$

قریب میں موجود جدول 13.1 مختلف وقفوں کو Seconds میں اور طے کئے گئے فاصلوں کو میٹر میں دکھا رہا ہے جبکہ ایک شئے کو کھڑی اور لمبی چٹان سے پھینکا گیا ہے۔ ان آنکڑوں سے ہمارا مقصد شئے کی رفتار کو $t = 2$ Seconds پر معلوم کرنا ہے۔ اس مسئلہ کی طرف بڑھنے کے لئے ایک راستہ یہ ہے کہ مختلف وقفوں کے لئے اوسط رفتار معلوم کی جائے جس میں $t = 2$ Seconds پر ختم ہو رہا ہو اور امید ہے کہ یہ $t = 2$ Seconds پر رفتار پر کچھ روشنی ڈالے گا۔

اوسط رفتار $t = t_1$ اور $t = t_2$ کے درمیان برابر ہے طے کیا گیا فاصلہ $t = t_1$ اور $t = t_2$ کے درمیان جو کہ $(t_2 - t_1)$ سے تقسیم کیا گیا ہو۔ اس طرح پہلے دو سیکنڈس میں اوسط رفتار

جدول 13.1

t	s
0	0
1	4.9
1.5	11.025
1.8	15.876
1.9	17.689
1.95	18.63225
2	19.6
2.05	20.59225
2.1	21.609
2.2	23.716
2.5	30.625
3	44.1
4	78.4

= طے کیا گیا فاصلہ $t_2 = 2$ اور $t_1 = 0$ کے درمیان

وقت کا وقفہ $(t_2 - t_1)$

اسی طرح اوسط رفتار $t_1 = 1$ اور $t_1 = 2$ کے درمیان ہے

$$\frac{(19.6-4.9)\,m}{(2-1)\,s} = 14.7\ m/s$$

اسی طرح ہم t_1 کی مختلف قدروں کے لئے $t = t_1$ اور $t = t_2$ کے لئے اوسط رفتار معلوم کرتے ہیں۔ ذیل جدول 13.2 اوسط رفتار (v) دیتا ہے $t = t_1$ سیکنڈس اور $t = 2$ سیکنڈس۔

جدول 13.2

t_1	0	1	1.5	1.8	1.9	1.95	1.99
v	9.8	14.7	17.15	18.62	19.11	19.355	19.551

ہم جدول 13.2 سے یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ اوسط رفتار آہستہ آہستہ بڑھ رہی ہے۔ جب ہم اوقات وقفہ کو $t = 2$ کو کم کر کے ختم کرتے ہیں، تب ہم دیکھتے ہیں کہ رفتار $t = 2$ کے لئے اچھا تصور ہے۔ یہ امید کرتے ہوئے کہ حیقت میں کوئی بہت بڑا اتار چڑھاؤ نہ آئے 1.99 سیکنڈس اور 2 سیکنڈس کے درمیان ہم اس نتیجے پر پہنچتے ہیں کہ اوسط رفتار $t = 2$ سیکنڈ پر

ایک دم1.9551m/s کے اوپر ہے۔

اس نتیجے کو ذیل تحاسب(Computation) کے سیٹ سے مزید تقویت ملتی ہے۔مختلف اوقات کے وقفوں کے لئے اوسط رفتار معلوم کیجئے۔t=2secs سے شروع کر کے'' جیسا کہ پہلے اوسط رفتار 'V' t =2 secs اور $t=t_2$ secs کے لئے معلوم کی تھی اسی طرح:

$$V=\frac{\text{2 سیکنڈس اور } t_2 \text{ سیکنڈس کے درمیان طے کیا گیا فاصلہ}}{t_2-2}$$

$$=\frac{\text{2 سیکنڈس میں طے کیا گیا فاصلہ } t_2 \text{ میں طے کیا گیا فاصلہ}}{t_2-2}$$

$$=\frac{\text{19.6} - t_2 \text{ سیکنڈ میں طے کیا گیا فاصلہ}}{t_2-2}$$

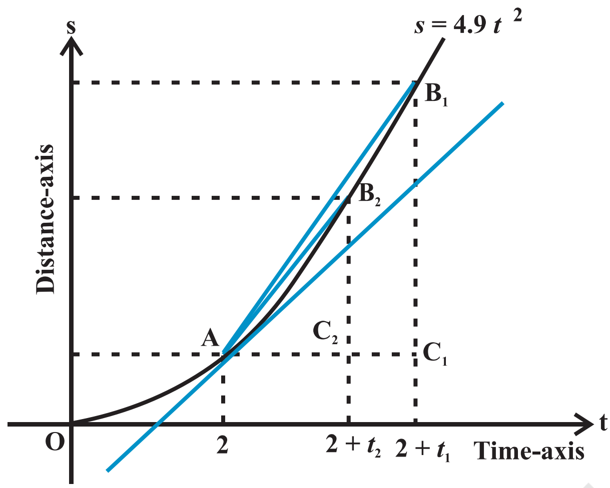
نیچے دئے گئے جدول13.3 میں اوسط رفتار"V" میٹر فی سیکنڈ t=2secs اور $t = t_2$secs کے درمیان دی گئی ہے۔

جدول13.3

t_2	4	3	2.5	2.2	2.1	2.05	2.01
V	29.4	24.5	22.5	20.58	20.09	19.845	19.649

یہاں ہم پھر ایک بات نوٹ کرتے ہیں کہ اگر ہم کم تر وقت کے وقفے لیں t=2secs سے شروع کرتے ہوئے تو ہمیں t=2secs پر رفتار کا بہتر تصور حاصل ہوتا ہے۔

کمپیوٹیشن کے پہلے سیٹ میں ہم نے اوسط رفتاریں اوقات کے وقفوں کی بڑھتی ہوئی ترتیب میں معلوم کیں جو 2 = t پر ختم ہوئی اور اس امید پر کہ 2 = t سے ذرا قبل کوئی غیر معمولی تبدیلی نہیں ہوگی۔کمپیوٹیشن کے دوسرے سیٹ میں ہم نے اوسط رفتاریں اوقات کے وقفوں کی گھٹتی ہوئی ترتیب میں معلوم کیں جو 2=t پر ختم ہوئی اور اس امید پر کہ 2 =t کے ذرا بعد کوئی غیر معمولی تبدیلی نہیں ہوگی۔محض طبعی بنیادوں پر یہ دونوں اوسط رفتاروں کے تسلسل (Sequances) لازمی طور پر ایک مشترک حد تک پہنچیں گی۔ہم بآسانی یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ 2=t پر اس شئے کی رفتار 19.551m/s اور 19.649 m/s کے درمیان



شکل13.1

ہوگی۔تکنیکی اعتبار سے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $t=2$ پر فی الفوررفتار 19.551 m/s اور 19.649 m/s کے درمیان ہے۔ہم جانتے ہیں کہ رفتار کسی شئے کے فاصلہ بدلنے کی شرح ہوتی ہے۔اس طرح ہم جوکچھ مکمل کر پائے ہیں وہ یہ ہے کہ فوری طور پر مختلف اوقات پر دئے ہوئے آنکڑوں سے ہم نے فاصلوں کی شرح کا دئے گئے اوقات پر فی الفوراندازہ لگایا ہے۔ہم کہہ سکتے ہیں کہ فاصلہ تفاعل $S = 4.9t^2$(Distance function) کا مشتق $t=2$ پر 19.551 اور 19.649 کے درمیان ہے۔

اس حدی طریقہ کار کا بطور مطالعہ کے لئے ایک متبادل شکل 13.1 میں دکھایا گیا ہے۔یہ ایک شئے کا چٹان کی چوٹی سے فاصلہ 'S' بالمقابل گذرنے والے وقت t کا ایک نقشہ (Plot) ہے۔انتہا(Limit) میں جیسے جیسے اوقات کے وقفوں کا تسلسل $h1, h2, h3,$........ صفر 'o' کی طرف بڑھ رہا ہے اوسط رفتار کا تسلسل اسی انتہا (Limit) کی طرف بڑھ رہا ہے جیسا کہ درج ذیل نسبتوں کا تسلسل بڑھ رہا ہے۔

$$\frac{C_1B_1}{AC_1}, \frac{C_2B_2}{AC_2}, \frac{C_3B_3}{AC_3}, \ldots\ldots$$

جبکہ $C_1B = S_1 - S_o$ وہ فاصلہ ہے جو یہ شئے $h_1 = AC_1$ وقفہ میں طے کیا ہے وغیرہ وغیرہ۔شکل 13.1 سے بآسانی اخذ کیا جاسکتا ہے کہ بعد والا تسلسل منحنی(Curve) پر نقطہ **A** پر خط مماس کے سلوپ کی طرف پہونچ رہا ہے بہ الفاظ دگر وقت $t=2$ پر اس شئے کی فی الفوررفتار "$V(t)$" منحنی $S=4.9t_2$ کے خط مماس (Tangent) کے سلوپ کے برابر ہے۔

13.3 انتہاء Limits

اوپر کی گئی بات چیت اس حقیقت کی طرف صاف طور پر نشان دہی کرتی ہے کہ ہمیں حدّی طریقہ کار کو زیادہ صاف طریقے سے سمجھنا ہوگا۔ہم کچھ ایسی مثالوں کے بارے میں پڑھیں گے جہاں مثالیں دے کر حدّی طریقہ کار کے تصور سے روشناس کرایا گیا ہے۔

مان لیجئے فنکشن $f(x) = x^2$ مشاہدہ کیجئے x صفر '0' کے بہت قریب کی قدریں حاصل کرتا ہے، $f(x)$ کی قدر بھی '0' کی طرف بڑھتی ہے (سبق 2 کی شکل 2.10 دیکھئے)۔ ہم کہتے ہیں۔

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

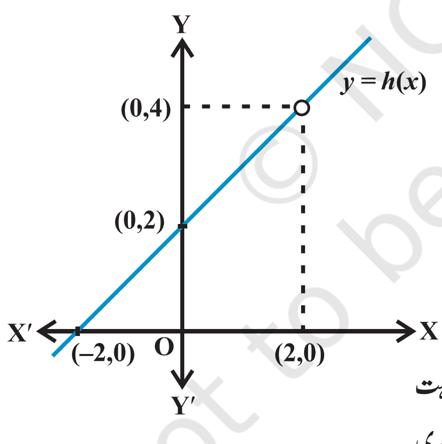
(جسے اس طرح پڑھا جاتا ہے کہ $f(x)$ کی انتہاء صفر کے برابر ہوتی ہے جب کہ x صفر کی طرف بڑھتا ہے)۔ $f(x)$ کی انتہا جبکہ x صفر کی طرف بڑھتا ہے کو اس طرح سوچنا چاہئے کہ $f(x)$ کی قدر کو $x = 0$ پر مان لینا چاہئے۔

عام طور پر جیسے ہی $x \to a$ ، $f(x) \to l$ تب l کو فنکشن $f(x)$ کی انتہا کہا جاتا ہے جسے علامت کے طور پر اس طرح لکھا جاتا ہے، $\lim_{x \to a} f(x) = l$

ذیل فنکشن $g(x) = |x|, x \neq 0$ پر غور کیجئے۔ مشاہدہ کیجئے کہ $g(0)$ کی تعریف بیان نہیں کی گئی ہے۔ $g(x)$ کی قدروں کو تمام x کی قدروں کے جو صفر کے بہت قریب ہیں محسوب کرنے Computing پر ہم دیکھتے ہیں کہ $g(x)$ کی قدر '0' کے قریب بڑھتی ہے۔ اس طرح $\lim_{x \to 0} g(x) = 0$ یہ $y = |x|\ for\ x \neq 0$ کے گراف سے وجدانی (Intutivety) طور پر صاف ہے دیکھئے سبق 2، شکل 2.13۔

ذیل فنکشن پر غور کیجئے

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}, x \neq 2$$



شکل 13.2

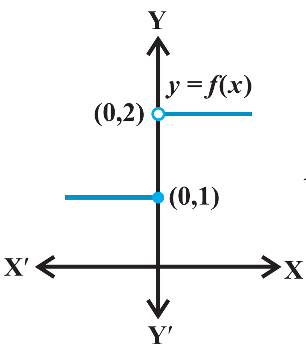
$h(x)$ کی اقدار محسوب کیجئے x کی ان اقدار پر جو 2 سے بہت نزدیک تر ہوں (مگر 2 پر نہیں)۔ اب آپ ذہن نشین کر لیجئے کہ یہ ساری اقدار '4' کے نزدیک ہیں شکل 13.2 میں $y=h(x)$ کے گراف کو غور کرنے پر اس کو کچھ اور تقویت ملتی ہے۔

ان تمام تشریحات میں تفاعل کسی دئے ہوئے نقطہ $x=a$ پر جو قدر اختیار کرتا ہے حقیقتاً وہ اس پر منحصر نہیں ہے کہ عدد x کس طرح a کی طرف پہونچ رہا ہے۔ نوٹ کیجئے کہ a کی جانب x کے پہونچنے کے صرف دو ہی طریقے ہیں یا تو بائیں جانب سے

یا داہنی جانب سے۔یعنی x کی تمام اقدار یا تو a سے کم ہونگی یا a سے زیادہ ہونگی۔ظاہر ہے یہ ہماری دو حدود کی جانب رہنمائی کرتا ہے۔دائیں ہاتھ والی حد یا بائیں ہاتھ والی حد۔کسی تفاعل $f(x)$ کی دائیں ہاتھ والی حد $f(x)$ کی وہ قدر ہے جو x کو a کی دائیں جانب سے پہونچنے پر درج کرائی جاتی ہے اسی طرح سے معاملہ بائیں ہاتھ والی حد کا ہے۔اس کی تشریح کے لئے درج ذیل تفاعل پر غور کریں۔

$$f(x)=\begin{cases}1 x\le 2\\ 2 x>2\end{cases}$$

اس تفاعل کا گراف شکل 13.3 میں دکھایا گیا ہے۔ظاہر ہے کہ f کی قدر 'o' اور $f(x)$ کی درج شدہ اقدار $x \le 0$ پر '1' ہے۔یعنی $f(x)$ کی بائیں ہاتھ والی 'o' پر حد ہے۔



شکل 13.3

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=1$$

اسی طرح ' f ' کی 'o' پر قدر $f(x)$ کی $f(x)$ $x>0'$ پر درج شدہ اقدار '2' کے برابر ہیں۔یعنی $f(x)$ کی داہنے ہاتھ والی 'o' پر حد ہے

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=2$$

اس کیس میں بائیں اور داہنی حدود مختلف ہیں۔پس ہم کہہ سکتے ہیں کہ $f(x)$ کی حد کا وجود ہی نہیں ہے جبکہ 'x' 'o' کی طرف بڑھتا ہے(حتیٰ کہ تفاعل 'o' پر defined ہے)

خلاصہ (Summary)

ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to a^-} f(x)$ تفاعل ' f ' کی $x=a$ پر متوقع قدر ہے جو x کے قریب a کی بائیں جانب ' f ' کی دی ہوئی اقدار ہیں۔یہ قدر ' f ' کی طرف ہیں۔یہ قدر ' f ' کی a پر بائیں ہاتھ والی حد کہلاتی ہے۔

ہم کہتے ہیں کہ $\lim_{x\to a^+} f(x)$ تفاعل ' f ' کی $x=2$ پر متوقع قدر ہے جو x کے قریب a کی داہنی جانب ' f ' کی دی ہوئی اقدار ہیں۔یہ قدر ' f ' کی a پر دائیں ہاتھ والی حد کہلاتی ہے۔

اگر دائیں ہاتھ والی حد اور بائیں ہاتھ والی حد یکساں ہوں تو یہ یکساں مشترک قدر $x=a$ پر $f(x)$ کی حد کہلاتی ہے۔ہم اس کو اس طرح ظاہر کرتے ہیں $\lim_{x\to a} f(x)$

تشریح 1 فنکشن $f(x) = x + 10$ پر غور کیجیے۔ ہم اس فنکشن کی انتہاء (حد) $x = 5$ پر معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ فنکشن $f(x)$ کی قدر کو ہم نکالنا چاہتے ہیں جس میں x'5 کے بہت قریب ہو۔ کچھ نقاط 5 کے قریب بائیں طرف 4.9، 4.95، 4.99، 4.995، وغیرہ وغیرہ ہیں۔ فنکشن کی قدریں ان نقاط پر نیچے جدول میں دی گئی ہیں۔ اسی طرح، حقیقی اعداد 5.001، 5.01، 5.1 بھی 5 کے قریب دائیں طرف نقاط ہیں۔ اس فنکشن کی قدریں ان نقاط پر بھی جدول 13.4 میں۔

جدول 13.4

x	4.9	4.95	4.99	4.995	5.001	5.01	5.1
$f(x)$	14.9	14.95	14.99	14.995	15.001	15.01	15.1

جدول 13.4 سے ہم نے یہ نکالا ہے کہ $f(x)$ کی قدر $x = 5$ پر 14.995 سے بڑی ہونی چاہئے اور اور 15.001 سے کم یہ مانتے ہوئے کہ کوئی بہت بڑی تبدیلی نہ آئے $x = 4.995$ اور 5.001 کے درمیان۔ یہ ماننا قابلِ قبول ہے کہ $f(x)$ کی قدر $x = 5$ پر جیسا کہ اعداد نے درج کرایا ہے 5 کے بائیں طرف 15 ہے۔

یعنی
$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 15$$

اسی طرح، جب x دائیں طرف سے 5 پر پہنچتا ہے۔ $f(x)$ کی قدر 15 ہوجاتی ہے۔

یعنی
$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 15$$

اس لئے یہ ممکن ہے کہ $f(x)$ کی بائیں ہاتھ کی انتہاء اور دائیں ہاتھ کی انتہاء دونوں 15 کے برابر ہیں۔ اس طرح،

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = \lim_{x \to 5^+} f(x) = \lim_{x \to 5} f(x) = 15$$

یہ نتیجہ انتہاء کے لئے کہ یہ 15 کے برابر ہے اور واضح ہوجاتا ہے جب اس فنکشن کا گراف جو شکل 2.16 میں باب 2 دیکھا جاتا ہے۔ اس شکل میں ہم نوٹ کرتے ہیں کہ x '5 تک پہنچتا ہے۔ دائیں اور بائیں دونوں طرف سے، فنکشن $f(x) = x + 10$ کا گراف نقطہ (5, 15) کی طرف بڑھ جاتا ہے۔ ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ فنکشن کی قدر $x = 2$ پر بھی 12 کے برابر ہوجاتی ہے۔

تشریح 2 فنکشن $f(x) = x^3$ پر غور کیجیے۔ ہمیں اس فنکشن کی انتہاء $x = 1$ پر معلوم کرنے کی کوشش کرنی چاہئے پچھلے

کیس کی طرح آگے بڑھتے ہوئے، ہم $f(x)$ کی قدر کا جدول بناتے ہیں x پر جو '1' کے قریب ہے۔ یہ جدول 13.5 میں دیا گیا ہے۔

جدول 13.5

x	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$f(x)$	0.729	0.970299	0.997002999	1.003003001	1.030301	1.331

اس جدول سے، ہم یہ نکالتے ہیں کہ $f(x)$ کی قدر $x = 1$ پر 0.997002999 سے بڑی اور 1.003003001 سے کم ہونی چاہئے یہ مانتے ہوئے کہ کوئی بہت بڑی تبدیلی $x = 0.999$ اور 1.001 کے درمیان نہیں ہونی چاہئے۔ یہ ماننا قابلِ قبول ہے کہ $f(x)$ کی قدر $x = 1$ پر جیسا کہ اعداد نے درج کرایا ہے '1' کے بائیں طرف 1 ہے، یعنی

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$$

اسی طرح، جب ہم دائیں سے '1' کی طرف جاتے ہیں، $f(x)$ کی قدر 1 ہونی چاہئے، یعنی

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$$

اس لئے، یہ ممکن ہے کہ $f(x)$ کی بائیں ہاتھ کی انتہاء اور $f(x)$ کی دائیں ہاتھ کی انتہاء دونوں '1' ہیں، اس طرح

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1} f(x) = 1$$

یہ نتیجہ جس میں انتہاء '1' کے برابر ہے اور تقویت دیتا ہے جب اس فنکشن کا گراف جو کہ شکل 2.11، سبق 2 میں ہے کو دیکھا جاتا ہے۔ اس شکل میں یہ دیکھتے ہیں کہ (نوٹ کرتے ہیں) کہ جس طرح x کسی بھی بائیں یا داہنی طرف '1' پر پہنچتا ہے، فنکشن $f(x) = x^3$ فنکشن کا گراف نقطہ $(1,1)$ پر پہنچتا ہے۔

ہم دوبارہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ فنکشن کی قدر $x = 1$ پر بھی '1' کے برابر ہو جاتی ہے۔

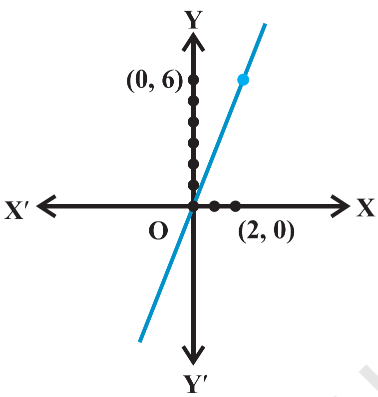
تشریح 3 فنکشن $f(x) = 3x$ پر غور کیجئے۔ ہمیں اس فنکشن کی قدر $x = 2$ پر معلوم کرنے کی کوشش کرنی چاہئے۔ ذیل جدول 13.6 اپنا جواب خود دے رہی ہے۔

جدول 13.6

x	1.9	1.95	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	5.7	5.85	5.97	5.997	6.003	6.03	6.3

جیسا کہ ہم نے پہلے مشاہدہ کیا ہے کہ جس طرح x، 2 کی طرف بڑھ رہا ہے بائیں یا داہنی طرف سے، $f(x)$ کی قدر '6' کی طرف بڑھتی ہوئی دکھائی دیتی ہے۔ ہم اسے اس طرح ریکارڈ کرتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 6$$



شکل 13.4

اس کا گراف شکل 13.4 میں دکھایا گا ہے جو اس حقیقت کو اور تقویت دیتا ہے۔ یہاں ہم پھر دوبارہ نوٹ کرتے ہیں کہ فنکشن کی قدر $x = 2$ پر انتہا سے ملتی ہے جب کہ $x = 2$ ہو۔

تشریح 4 مستقل فنکشن $f(x) = 3$ پر غور کیجیے۔ ہم اس کی انتہا $x = 2$ پر معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں۔ کیونکہ یہ فنکشن مستقل فنکشن ہے۔ اس لیے اس کی یکساں قدریں ہوتی ہیں (3 اس کیس میں) ہر جگہ، یعنی اس کی قدر ان نقطوں پر جو 2 کے قریب ہیں 3 ہے۔ اس طرح

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2} f(x) = 3$$

$f(x) = 3$ کا گراف x-axis کے متوازی کسی بھی خط پر (0,3) سے ہو کر گزر رہا ہے اور یہ شکل 2.9، باب 2 میں دکھایا گیا ہے۔ اس سے یہ بھی صاف ہے کہ مطلوبہ انتہا 3 ہے۔ حقیقت میں اس کا آسانی سے مشاہدہ کیا جا سکتا ہے کہ کسی بھی حقیقی عدد 'a' کے لیے $\lim_{x\to a} f(x) = 3$

تشریح 5 فنکشن $f(x) = x^2 + x$ پر غور کیجیے۔ ہم انتہا $\lim_{x\to 1} f(x)$ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔ ہم $f(x)$ کی قدروں کو $x = 1$ کے نزدیک جدول کی شکل میں لکھتے ہیں (جدول 13.7)

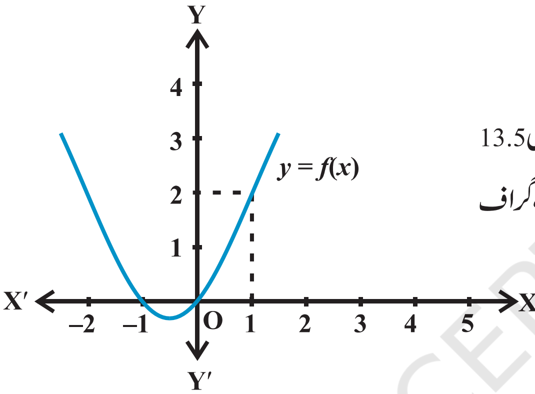
جدول13.7

x	0.9	0.99	0.999	1.01	1.1	1.2
$f(x)$	1.71	1.9701	1.997001	2.0301	2.31	2.64

اس سے یہ معلوم کرنا مناسب ہے

$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1} f(x) = 2$$

فنکشن $f(x) = x^2 + x$ کے گراف سے جیسا کہ شکل 13.5 میں دکھایا گیا ہے کہ جس طرح x، 1 کی طرف بڑھتا ہے، گراف (1,2) کی طرف بڑھ جاتا ہے۔



شکل13.5

یہاں ہم دوبارہ یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ

$$\lim_{x\to1} f(x) = f(1)$$

اب یہاں ذیل تین حقیقتوں سے اپنے آپ کو مطمئن کر لیجیے۔

$$\lim_{x\to1} x^2 = 1,\quad \lim_{x\to1} x = 1 \text{ and } \lim_{x\to1} x+1 = 2$$

تب $\lim_{x\to1} x^2 + \lim_{x\to1} x = 1+1 = 2 = \lim_{x\to1}\left[x^2+x\right]$

ساتھ ہی $\lim_{x\to1} x.\ \lim_{x\to1}(x+1) = 1.2 = 2 = \lim_{x\to1}\left[x(x+1)\right] = \lim_{x\to1}\left[x^2+x\right]$

تشریح 6 فنکشن $f(x) = \sin x$ پر غور کیجیے۔ ہماری دلچسپی $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x$ میں ہے، جہاں زاویہ کو ریڈین میں ناپا گیا ہے۔

یہاں ہم $f(x)$ کی قدر $\frac{\pi}{2}$ کے نزدیک (جدول 13.8) میں فہرستی شکل (تقریباً) میں لکھتے ہیں۔ ہم اس سے یہ نکال سکتے ہیں

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 1$$

اس کے آگے اس گراف کو $f(x) = \sin x$ کی مدد حاصل ہے جو کہ شکل 3.8 میں دیا گیا ہے۔ اس کیس میں بھی، ہم مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \sin x = 1$

جدول 13.8

$\frac{\pi}{2}+0.1$	$\frac{\pi}{2}+0.01$	$\frac{\pi}{2}-0.01$	$\frac{\pi}{2}-0.1$	x
0.9950	0.9999	0.9999	0.9950	$f(x)$

تشریح 7 فنکشن $f(x) = x + \cos x$ پر غور کیجیے۔ ہم $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ معلوم کرنا چاہتے ہیں۔

یہاں ہم $f(x)$ کی قدر کی 0 کے قریب (جدول 13.9) میں دی گئی فہرست (تقریباً) بناتے ہیں۔

جدول 13.9

x	-0.1	-0.01	-0.001	0.001	0.01	0.1
$f(x)$	0.9850	0.98995	0.9989995	1.0009995	1.00995	1.0950

جدول 13.9 سے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں۔

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} f(x) = 1$$

اس کیس میں بھی ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = f(0) = 1$

کیا اب، آپ اپنے آپ کو سمجھا سکتے ہیں کہ

$\lim\limits_{x\to 0}[x + \cos x] = \lim\limits_{x\to 0} x + \lim\limits_{x\to 0} \cos x$ یہ حقیقت میں صحیح ہے۔

تشریح 8 فنکشن $f(x) = \frac{1}{x^2}$ for $x > 0$ پر غور کیجیے۔ ہم $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ دریافت کرنا چاہتے ہیں۔

یہاں ہم یہ مشاہدہ کرتے ہیں کہ فنکشن کا علاقہ تمام مثبت حقیقی اعداد دیا ہوا ہے۔ اس طرح جب ہم $f(x)$ کی قدروں کی فہرست بناتے ہیں، اس سے کوئی مطلب نہیں نکلتا کہ 'x' بائیں طرف سے صفر کی طرف بڑھ رہا ہے۔ نیچے ہم فنکشن کی قدریں فہرست کی شکل میں مثبت x کے لیے جو صفر کے قریب ہے (اس جدول میں x کی بھی مثبت صحیح عدد کو ظاہر کرتا ہے)۔

ذیل میں دیے گئے جدول 13.10 سے ہم دیکھتے ہیں کہ جس طرح x، 0 کی طرف بڑھتا ہے، $f(x)$ بڑا اور بڑا ہوتا جاتا ہے۔ ہمارا یہاں کیا مطلب ہے کہ $f(x)$ کی قدر کو کسی بھی دیے ہوئے عدد سے بڑا بنایا جا سکتا ہے۔

جدول 13.10

x	1	0.1	0.01	10^{-n}
$f(x)$	1	100	10000	10^{2n}

ریاضیاتی طور پر ہم کہتے ہیں

$$\lim_{x \to 0} f(x) = +\infty$$

ہم یہاں یہ بھی ریمارک لکھتے ہیں کہ اس کورس میں ہمارے پاس اس طرح کی انتہا (limits) نہیں آئیں گی۔

تشریح 9 ہم $\lim_{x \to 0} f(x)$ معلوم کرنا چاہتے ہیں، جہاں

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & x<0 \\ 0 \quad , & x=0 \\ x+2, & x>0 \end{cases}$$

ہم ہمیشہ کی طرح x کے لیے جدول بناتے ہیں صفر کے قریب اور $f(x)$ کے ساتھ۔ اس کا مشاہدہ کیجیے کہ منفی قدروں x کے لیے ہمیں $x-2$ کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے، اور مثبت قدروں کے لیے ہمیں $x+2$ کو معلوم کرنے کی ضرورت ہے۔

جدول 13.11

0.1	0.01	0.001	– 0.001	– 0.01	– 0.1	x
2.1	2.01	2.001	– 2.001	– 2.01	– 2.1	$f(x)$

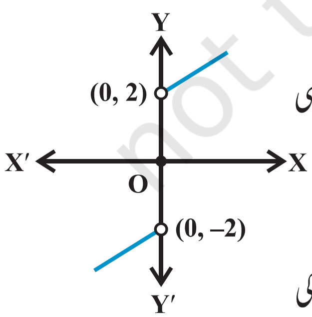
جدول 13.11 کی پہلے تین اندراج (entries) سے ہم یہ نکالتے ہیں کہ فنکشن کی قدر 2– تک کم ہو رہی ہے اور اس طرح

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = -2$$

جدول کے آخری تین اندراج سے ہم یہ نتیجہ نکالتے ہیں کہ فنکشن کی قدر 2 سے بڑھ رہی ہے اور اس طرح

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2$$

کیونکہ دائیں اور بائیں ہاتھ کی انتہائیں (limits) 0 پر نہیں ملتیں۔ ہم کہتے ہیں کہ فنکشن کی انتہا 0 پر وجود میں نہیں ہے۔



شکل 13.6

اس فنکشن کا گراف شکل 13.6 میں دیا گیا ہے۔ یہاں ہم یہ ریمارک لکھتے ہیں کہ $x = 0$ پر فنکشن کی قدر بخوبی بیان کی گئی ہے اور اصلیت میں یہ 0 کے برابر ہے، لیکن فنکشن کی انتہا $x = 0$ پر بیان نہیں کی گئی ہے۔

تشریح 10 آخری تصور کے طور پر ہم $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ دریافت کرتے ہیں جہاں

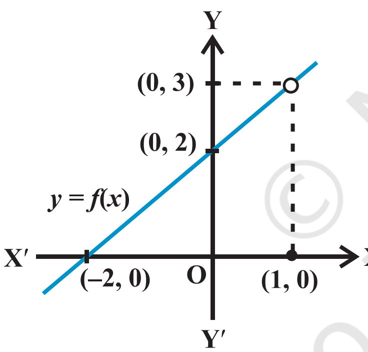
$$f(x)=\begin{cases} x+2 & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$$

جدول 13.12

1.1	1.01	1.001	0.999	0.99	0.9	x
3.1	3.01	3.001	2.999	2.99	2.9	$f(x)$

ہمیشہ کی طرح ہم $f(x)$ کی قدروں کی فہرست بناتے ہیں 1 کے قریب x کے لیے۔ $f(x)$ کی قدروں سے 1 سے کم x کے لیے، ایسا لگتا ہے کہ فنکشن کی قیمت $x = 1$ پر 3 ہوجائے گی اس کا مطلب

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=3$$



شکل 13.7

اسی طرح $f(x)$ کی قدر بھی 3 ہوگئی جیسا کہ $f(x)$ کی قدر حکم دیتی ہے جہاں x، 1 سے بڑا ہے۔

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$$

لیکن تب دائیں اور بائیں ہاتھ کی انتہائیں (limits) مل جاتی ہیں اور اس طرح

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1} f(x)=3$$

فنکشن کا گراف شکل 13.7 میں دیا گیا ہے جو ہماری معلوم کی گئی انتہا کو تقویت دیتا ہے۔ یہاں ہم یہ نوٹ کرتے ہیں۔ اس طرح عام طور پر ایک دیے ہوئے نقطے پر فنکشن کی قدر اور اس کی انتہا مختلف ہوسکتی ہے (اور جب کہ دونوں کی ہی تعریف بیان کی گئی ہو)۔

13.3.1 حدود کا الجبرا (*Algebra of Limits*)

اوپر دیے ہوئے تصورات میں ہم نے یہ مشاہدہ کیا ہے کہ حدود کے طریقے، جمع، تفریق، ضرب اور تقسیم کے طریقوں کا لحاظ کرتے ہیں، جہاں تک حدود اور فنکشن جو قابل غور ہیں انہیں

اچھی طرح defined کیا گیا ہے۔ یہ ایک اتفاق نہیں ہے۔ حقیقت میں نیچے ہم انہیں ایک مسئلہ کی طرح فارمولے کی شکل میں لکھتے ہیں بغیر ثابت کیے۔

مسئلہ 1 مان لیجیے f اور g دو فنکشن ہیں اس طرح کہ $\lim_{x \to a} f(x)$ اور $\lim_{x \to a} g(x)$ موجود ہیں۔

(i) دو فنکشنوں کی حدود کا جوڑ فنکشن کے حدود کے جوڑ کے برابر ہے، یعنی،

$$\lim_{x \to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x).$$

(ii) دو فنکشنوں کی حدود کا فرق دو فنکشن کی حدود کے فرق کے برابر ہے، یعنی

$$\lim_{x \to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) - \lim_{x \to a} g(x).$$

(iii) دو فنکشنوں کی حدود کا حاصل ضرب دو فنکشن کی حدود کے حاصل ضرب کے برابر ہے، یعنی

$$\lim_{x \to a}[f(x) \,.\, g(x)] = \lim_{x \to a} f(x) . \lim_{x \to a} g(x).$$

(iv) دو فنکشنوں کے خارج قسمت کی حد دو فنکشنوں کی حدود کے خارج قسمت کے برابر ہے (جہاں نسب نما ایک غیر صفر ہے)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)}$$

نوٹ خاص طور پر (iii) کے ایک معیاری کیس کی طرح جہاں g ایک مستقل فنکشن ہے تا کہ $g(x) = \lambda$ کسی بھی حقیقی عدد λ کے لیے ہمارے پاس ہے

$$\lim_{x \to a}\left[(\lambda . f)(x)\right] = \lambda . \lim_{x \to a} f(x)$$

اگلے دو آنے والے سیکشن میں، ہم یہ تصور کریں گے کہ خاص طرح کے فنکشنوں کی حدوں کو معلوم کرنے کے لیے اس مسئلہ سے کس طرح استفادہ کیا جا سکتا ہے۔

13.3.2 کثیر رکنیوں کی حدود اور ناطق نفاعل (Limits of polynomials and rational functions)

کثیر رکنی فنکشن کہا جاتا ہے اگر $f(x) = 0$ ہے یا $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x_2 + \ldots + a_nx^n$، جہاں $a_i s$ حقیقی اعداد ہیں اور $a_n \neq 0$ کسی طبعی عدد n کے لیے۔

ہم جانتے ہیں کہ $\lim_{x \to a} x = a$

اس لیے $\lim_{x \to a} x^2 = \lim_{x \to a} (x.x) = \lim_{x \to a} x . \lim_{x \to a} x = a . a = a^2$

n کے استقراء مالہ (induction) میں ایک آسان مشق ہمیں بتاتا ہے کہ

$$\lim_{x \to a} x^n = a^n$$

اب مان لیجیے $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ ایک کثیر رکنی فنکشن ہے۔ ہر ایک $a_0, a_1 x, a_2x^2, ..., a_n x^n$ کے بارے میں فنکشن کی طرح سوچنے پر ہمارے پاس ہے

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left[a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n \right]$$

$$= \lim_{x \to a} a_0 + \lim_{x \to a} a_1x + \lim_{x \to a} a_2x^2 + ... + \lim_{x \to a} a_nx^n$$

$$= a_0 + a_1 \lim_{x \to a} x + a_2 \lim_{x \to a} x^2 + ... + a_n \lim_{x \to a} x^n$$

$$= a_0 + a_1a + a_2a^2 + ... + a_na^n$$

$$= f(a)$$

(اس بات کو ذہن نشین کر لیجیے کہ اوپر دیے ہوئے ہر قدم کے جواز (justification) کو آپ سمجھتے ہیں)

ایک فنکشن f کو اس وقت ناطق فنکشن کہا جاتا ہے، اگر $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ ہو، جہاں $g(x)$ اور $h(x)$ کثیر رکنیں ہوں اور $h(x) \neq 0$ ۔تب

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\lim_{x \to a} g(x)}{\lim_{x \to a} h(x)} = \frac{g(a)}{h(a)}$$

حالانکہ، اگر $h(a) = 0$ ، یہاں دو عبارتیں (scenarios) ہیں۔ (i) جب $g(a) \neq 0$ اور (ii) جب $g(a) = 0$ ۔ پہلے کیس میں ہم کہتے ہیں کہ انتہا وجود میں نہیں ہے۔ بعد کے کیس میں ہم لکھ سکتے ہیں کہ $g(x) = (x - a)^k g_1(x)$ ، جہاں k، $(x - a)$ کی $g(x)$ میں سب سے زیادہ طاقت ہے۔ اسی طرح،

$h(x) = (x - a)^l h_1(x)$ as $h(a) = 0$ ، اب اگر $k \geq l$ ، ہمارے پاس ہے

$$\lim_{x\to a} f(x) = \frac{\lim_{x\to a} g(x)}{\lim_{x\to a} h(x)} = \frac{\lim_{x\to a} (x-a)^k g_1(x)}{\lim_{x\to a} (x-a)^l h_1(x)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to a} (x-a)^{(k-l)} g_1(x)}{\lim_{x\to a} h_1(x)} = \frac{0.g_1(a)}{h_1(a)} = 0$$

اگر $k < l$، انتہا کی تعریف بیان نہیں کی گئی ہے۔

مثال 1 حدود معلوم کیجیے (i) $\lim_{x\to 1}\left[x^3 - x^2 + 1\right]$ (ii) $\lim_{x\to 3}\left[x(x+1)\right]$

(iii) $\lim_{x\to -1}\left[1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right]$

حل مطلوبہ حد کچھ کثیر رکنی فنکشنوں کی حدود ہیں

(i) $\lim_{x\to 1} [x^3 - x^2 + 1] = 1^3 - 1^2 + 1 = 1$

(ii) $\lim_{x\to 3}\left[x(x+1)\right] = 3(3+1) = 3(4) = 12$

(iii) $\lim_{x\to -1}\left[1 + x + x^2 + ... + x^{10}\right] = 1 + (-1) + (-1)^2 + ... + (-1)^{10}$

$$= 1 - 1 + 1 ... + 1 = 1$$

مثال 2 حدود معلوم کیجیے:

(i) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x^2+1}{x+100}\right]$ (ii) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4}\right]$

(iii) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^2 - 4}{x^3 - 4x^2 + 4x}\right]$ (iv) $\lim_{x\to 2}\left[\frac{x^3 - 2x^2}{x^2 - 5x + 6}\right]$

(v) $\lim_{x\to 1}\left[\frac{x-2}{x^2 - x} - \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x}\right]$

حل جن فنکشن کا مشاہدہ کیا جا رہا ہے وہ تمام ناطق فنکشن ہیں۔ اس لیے ہم پہلے ان فنکشن کو دیے ہوئے نقاط پر نکالیں گے۔ اگر یہ $\frac{0}{0}$ کی شکل کا ہے، ہم کوشش کریں گے کہ ان اجزائے ضربی کو نکال کر فنکشن کو دوبارہ لکھیں جن کی وجہ سے انتہا کی شکل $\frac{0}{0}$

ہو جاتی ہے۔

(i) ہمارے پاس ہے $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+1}{x+100}=\frac{1^2+1}{1+100}=\frac{2}{101}$

(ii) فنکشن کی قیمت کا اندازہ نقطہ 2 پر لگائیں گے، جو یہ $\frac{0}{0}$ کی شکل کا ہے۔اس لئے

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-4x^2+4x}{x^2-4}=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)^2}{(x+2)(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x(x-2)}{(x+2)} \qquad \text{as } x\neq 2$$

$$=\frac{2(2-2)}{2+2}=\frac{0}{4}=0$$

(iii) فنکشن کی قیمت نقطہ 2 پر معلوم کرنے میں ہمیں $\frac{0}{0}$ کی شکل کا حاصل ہوتا ہے۔اس لئے

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^3-4x^2+4x}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)^2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{x(x-2)}=\frac{2+2}{2(2-2)}=\frac{4}{0}$$

جس کی تعریف بیان نہیں کی گئی ہے۔

(iv) فنکشن کی قیمت نقطہ 2 پر دریافت کرنے پر ہم یہ $\frac{0}{0}$ کی شکل کا ملتا ہے۔اس لئے

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2(x-2)}{(x-2)(x-3)}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2}{(x-3)}=\frac{(2)^2}{2-3}=\frac{4}{-1}=-4$$

(v) پہلے ہم فنکشن کو دوبارہ ناطق فنکشن کے طور پر لکھتے ہیں۔

$$\left[\frac{x-2}{x^2-x}-\frac{1}{x^3-3x^2+2x}\right]=\left[\frac{x-2}{x(x-1)}-\frac{1}{x\left(x^2-3x+2\right)}\right]$$

$$= \left[\frac{x-2}{x(x-1)} - \frac{1}{x(x-1)(x-2)} \right]$$

$$= \left[\frac{x^2 - 4x + 4 - 1}{x(x-1)(x-2)} \right]$$

$$= \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-1)(x-2)}$$

فنکشن کی قیمت کا 1 پر اندازہ لگانے پر ہمیں یہ $\frac{0}{0}$ کی شکل کا ملتا ہے۔اس لئے

$$\lim_{x \to 1} \left[\frac{x^2 - 2}{x^2 - x} - \frac{1}{x^3 - 3x^2 + 2x} \right] = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x(x-1)(x-2)}$$

$$= \lim_{x \to 1} \frac{(x-3)(x-1)}{x(x-1)(x-2)}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-3}{x(x-2)} = \frac{1-3}{1(1-2)} = 2$$

ہم یہ ریمارک دیتے ہیں کہ ہم رکن $(x-1)$ کو مندرجہ بالا قیمت کا اندازہ لگانے میں ختم کرسکتے ہیں کیونکہ $x \neq 1$

ایک اہم انتہا کا معلوم کرنا جو کہ تواتر میں استعمال کی گئی ہے نیچے ایک مسئلہ کی طرح دی گئی ہے۔

مسئلہ 2 کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لئے

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = na^{n-1}$$

ریمارک اوپر دیے ہوئے مسئلہ میں عبارت انتہا کے لئے درست ہے اگرچہ n کوئی بھی ناطق عدد ہے اور a مثبت عدد ہے۔

ثبوت $(x^n - a^n)$ کو $(x - a)$ سے تقسیم کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x a^{n-2} + a^{n-1})$$

اس طرح $$\lim_{x \to a} \frac{x^n - a^n}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \ldots + x\, a^{n-2} + a^{n-1})$$

$$= a^{n-1} + a\, a^{n-2} + \ldots + a^{n-2}(a) + a^{n-1}$$

$$= a^{n-1} + a^{n-1} + \ldots + a^{n-1} + a^{n-1} \ (n \text{ terms})$$

$$= na^{n-1}$$

مثال 3 قیمت کااندازہ لگایئے

(i) $\lim_{x \to 1} \frac{x^{15}-1}{x^{10}-1}$ (ii) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

حل (i) ہمارے پاس ہے

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{15}-1}{x^{10}-1} = \lim_{x \to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1} \div \frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x \to 1}\left[\frac{x^{15}-1}{x-1}\right] \div \lim_{x \to 1}\left[\frac{x^{10}-1}{x-1}\right]$$

$$= 15(1)^{14} \div 10(1)^{9}$$ (اوپر دیے ہوئے مسئلہ سے)

$$= 15 \div 10 \frac{3}{2}$$

(ii) $y = 1+x$ رکھیے، تاکہ $y \to 1$ as $x \to 0$ ۔ تب

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{y \to 1} \frac{\sqrt{y}-1}{y-1}$$

$$= \lim_{y \to 1} \frac{y^{\frac{1}{2}} - 1^{\frac{1}{2}}}{y-1}$$

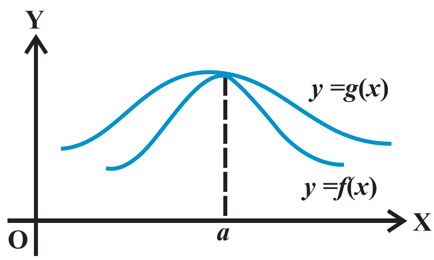
$$= \frac{1}{2}(1)^{\frac{1}{2}-1}$$ (اوپر دیے ہوئے ریمارک پر)

$$= \frac{1}{2}$$

13.4 ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی حدود (Limits of Trigonometric Functions)

ذیل حقیقتیں (جنھیں مسئلہ کے طور پر بیان کیا گیا ہے) عام طور پر فنکشن کے بارے میں ناکافی ہیں کچھ ٹرگنومیٹریائی فنکشن کی انتہا معلوم کرنے میں۔

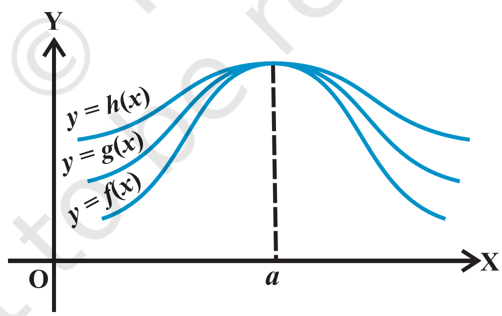
مسئلہ 3 مان لیجیے f اور g دوحقیقی قیمت والے فنکشن ہیں جن کا علاقہ یکساں ہے تا کہ $f(x) \le g(x)$ تمام x کے لئے جو کہ علاقہ میں ہیں تعریف کی روح سے، کسی a کے لئے، اگر دونوں انتہا $\lim_{x\to a} f(x)$ اور $\lim_{x\to a} g(x)$ وجود میں ہیں، تب $\lim_{x\to a} f(x) \le \lim_{x\to a} g(x)$ ۔ اسے شکل 13.8 میں سمجھایا گیا ہے۔



شکل 13.8

مسئلہ 4 سینڈوچ مسئلہ (Sandwich Theorem): مان لیجیے کہ f، g اور h حقیقی فنکشن ہیں تا کہ $f(x) \le g(x) \le h(x)$ تمام x کے لئے جو کہ علاقہ کی تعریف میں ہیں۔ حقیقی اعداد a کے لئے،

$\lim_{x\to a} f(x) = l = \lim_{x\to a} h(x)$, then $\lim_{x\to a} g(x) = l$ ۔ اسے شکل 13.9 میں سمجھایا گیا ہے۔

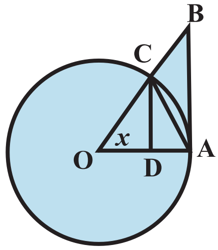


شکل 13.9

نیچے ایک بہت خوبصورت جیومیٹریائی ثبوت دیا گیا ہے۔ ذیل خاص نامساواتوں کا جو کہ ٹرگنومیٹریائی فنکشن میں رشتہ قائم کر رہی ہیں۔

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \text{ for } 0 < |x| < \frac{\pi}{2} \qquad (*)$$

ثبوت ہم جانتے ہیں کہ $\sin(-x) = -\sin x$ اور $\cos(-x) = \cos x$ ہوتا ہے۔اس لئے اس نامساوات کو $0 < x < \frac{\pi}{2}$ کے لئے ثابت کرنا کافی ہے۔



شکل 13.10

شکل 13.10 میں O اکائی دائرہ کا مرکز ہے تا کہ زاویہ AOC، x ریڈین ہو اور $0 < x < \frac{\pi}{2}$۔ تقاطعہ خطوط BA اور CD، OA پر عمود ہیں۔اس کے آگے AC کو جوڑیے،

تب

ΔOAB کا رقبہ > سیکٹر OAC کا رقبہ > ΔOAC کا رقبہ

یعنی $$\frac{1}{2}OA.CD < \frac{x}{2\pi}.\pi.(OA)^2 < \frac{1}{2}OA.AB$$

یعنی $$CD < x\ .\ OA < AB$$

ΔOCD سے

$$\sin x = \frac{CD}{OA}\ (oc = oA\ Q)$$ اور اس لئے $CD = OA \sin x$۔ ساتھ ہی $\tan x = \frac{AB}{OA}$

اور اس لئے $AB = OA \tan x$ ۔

اس طرح $$OA \sin x < OA.x < OA.\tan x$$

کیونکہ لمبائی OA مثبت ہے، ہمارے پاس ہے

$$\sin x < x < \tan x$$

کیونکہ $0 < x < \frac{\pi}{2}$، $\sin x$ مثبت ہے اور اس طرح ہر ایک کو $\sin x$ سے تقسیم کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

ہر ایک کا مقلوب لینے پر ہمارے پاس ہے $$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

جو ثبوت کو مکمل کرتا ہے۔

قضیہ (Proposition) 5 ذیل دو خاص حدود ہیں۔

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x}=0$

ثبوت (i) نامساوات (*) میں کہتی ہے کہ فنکشن $\dfrac{\sin x}{x}$ فنکشن $\cos x$ اور مستقل فنکشن جس کی قیمت 1 ہے کے درمیان موجود ہے۔

اس کے آگے، کیونکہ $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$، ہم دیکھتے ہیں کہ مسئلہ کا (i) کا ثبوت سینڈوچ مسئلہ سے مکمل ہے۔

(ii) کو ثابت کرنے کے لیے، ہم ٹرگنومیٹریائی اکائی کو دہراتے ہیں $1-\cos x=2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

تب

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}.\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{x}{2}\right)=1.0=0$$

مشاہدہ کیجیے کہ ہم نے حقیقت $x\to 0$ کا مطلب ہے $\dfrac{x}{2}\to 0$ کا بھرپور استعمال کیا ہے۔ اس کی وضاحت $y=\dfrac{x}{2}$ کے برابر رکھ کر کی جا سکتی ہے۔

مثال 4 معلوم کیجیے (i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{\sin 2x}$ (ii) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}$

حل (i)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}.\frac{2x}{\sin 2x}.2\right]$$

$$=2.\lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\div\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$=2.\lim_{4x\to 0}\left[\frac{\sin 4x}{4x}\right]\div\lim_{2x\to 0}\left[\frac{\sin 2x}{2x}\right]$$

$$=2.1.1=2\,(\text{as } x\to 0, 4x\to 0 \text{ and } 2x\to 0)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1.1=1 \quad \text{(ii)}$$

جب ہم انتہا کی قیمت کا اندازہ لگائیں اس وقت ہمیں یہ عام اصول دھیان میں رکھنا ہوگا جو کہ ذیل ہے۔ کہیے کہ دیا ہوا ہے انتہا $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ موجود ہے اور ہم اس کی قیمت کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں۔ پہلے ہم $f(a)$ اور $g(a)$ کی قدر کی جانچ پڑتال کریں گے۔ اگر دونوں 0 ہیں تب ہم دیکھتے ہیں کہ اگر ہم وہ اجزائے ضربی معلوم کر سکتے ہیں جو ارکان کو ختم کرنے کی وجہ بنا ہوا ہے، یعنی دیکھیے اگر ہم $f(x)=f_1(x)f_2(x)$ لکھ سکتے ہیں تا کہ $f_1(a)=0$ اور $f_2(a)\neq 0$۔ اسی طرح ہم $g(x)=g_1(x)\,g_2(x)$ لکھ سکتے ہیں، جہاں $g_1(a)=0$ اور $g_2(a)\neq 0$۔ $f(x)$ اور $g(x)$ (اگر ممکن ہو) سے مشترک اجزائے ضربی کو ختم کر دیجیے اور لکھئے

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(x)}{q(x)}\text{، جہاں } q(x)\neq 0$$

تب

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{p(a)}{q(a)}$$

مشق 13.1

مندرجہ ذیل مشق میں 1 تا 22 میں حدود کی قیمت معلوم کیجیے۔

.1 $\lim_{x\to 3} x+3$ **.2** $\lim_{x\to \pi}\left(x-\frac{22}{7}\right)$ **.3** $\lim_{r\to 1}\pi r^2$

.4 $\lim_{x\to 4}\frac{4x+3}{x-2}$ **.5** $\lim_{x\to -1}\frac{x^{10}+x^5+1}{x-1}$ **.6** $\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^5-1}{x}$

.7 $\lim_{x\to 2}\frac{3x^2-x-10}{x^2-4}$ **.8** $\lim_{x\to 3}\frac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$ **.9** $\lim_{x\to 0}\frac{ax+b}{cx+1}$

.10 $\lim_{z\to 1}\frac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$ **.11** $\lim_{x\to 1}\frac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a},\ a+b+c\neq 0$

.12 $\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$ **.13** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}$ **.14** $\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx},\ a,b\neq 0$

.15 $\lim_{x \to \pi} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$

.16 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{\pi - x}$

.17 $\lim_{x \to 0} \frac{\cos 2x - 1}{\cos x - 1}$

.18 $\lim_{x \to 0} \frac{ax + x\cos x}{b\sin x}$

.19 $\lim_{x \to 0} x\sec x$

.20 $\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$ $a, b, a+b \neq 0$

.21 $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$

.22 $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$

.23 $\lim_{x \to 0} f(x)$ اور $\lim_{x \to 1} f(x)$ معلوم کیجیے، جہاں $f(x) = \begin{cases} 2x+3, & x \leq 0 \\ 3(x+1), & x > 0 \end{cases}$

.24 $\lim_{x \to 1} f(x)$ معلوم کیجیے، جہاں $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ -x^2 - 1, & x > 1 \end{cases}$

.25 $\lim_{x \to 0} f(x)$ کی قیمت معلوم کیجیے، جہاں $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

.26 $\lim_{x \to 0} f(x)$ معلوم کیجیے، جہاں $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

.27 $\lim_{x \to 5} f(x)$ معلوم کیجیے، جہاں $f(x) = |x| - 5$

.28 مان لیجیے $f(x) = \begin{cases} a + bx, & x < 1 \\ 4, & x = 1 \\ b - ax, & x > 1 \end{cases}$

اور اگر $\lim_{x \to 1} f(x) = f(1)$، a اور b کی ممکن قدریں کیا ہیں؟

.29 مان لیجیے $a_1, a_2, ..., a_n$ مستقل حقیقی اعداد ہیں اور ایک فنکشن کی تعریف بیان کرتے ہیں

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2)...(x - a_n)$$

$\lim\limits_{x\to a_1}(x)$ کی قیمت کیا ہے؟ کسی $a \neq a_1, a_2, \ldots, a_n$ کے لئے $\lim\limits_{x\to a}(x)$ کا حساب لگائیے۔

.30 اگر
$$f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ |x|-1, & x>0\end{cases}$$

a کی کس قدر (قدروں) کے لئے $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ وجود میں ہے؟

.31 اگر فنکشن $f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-2}{x^2-1}=\pi$ کو مطمئن کرتا ہے، تب $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ کی قیمت کا اندازہ لگاؤ۔

.32 اگر
$$f(x)=\begin{cases}mx^2+n, & x<0\\ nx+m, & 0\leq x\leq 1\\ nx^3+m, & x>1\end{cases}$$
کن صحیح اعداد m اور n کے لئے دونوں $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ اور $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ وجود میں ہیں؟

13.5 مشتقات (Derivatves)

ہم سیکشن 13.2 میں دیکھ چکے ہیں کہ مختلف اوقات کے درمیان ایک شئے کی پوزیشن جانتے ہوئے ہم یہ معلوم کر سکتے ہیں کہ کس شرح سے شئے کی پوزیشن بدل رہی ہے۔ یہ بہت ہی عام دلچسپی کی بات ہے کہ کچھ پیرامیٹر (Parameter) کو مختلف اوقات پر معلوم کرنے کے لیے اور یہ معلوم کرنا کہ یہ کس شرح پر بدل رہا ہے۔ حقیقی زندگی میں بہت سے مواقع ہوتے ہیں جہاں ایسا طریقہ کار کرنا لازم ہوتا ہے مثال کے طور پر لوگوں کے پاس پانی کا ایک خزانہ ہے اور یہ جاننا چاہتے ہیں کہ پانی کب اس تالاب سے باہر نکل جائے گا یہ جانتے ہوئے کہ مختلف لمحات میں پانی کی گہرائی کیا ہے، راکٹ سائنس دانوں کو صحیح رفتار نکالنے کی ضرورت جس کے ذریعہ راکٹ سے سیٹلائیٹ کو مارنے کی ضرورت ہے یہ جانتے ہوئے کہ مختلف اوقات پر راکٹ کی کیا اونچائی ہے۔ مالیاتی اداروں کی یہ ذمے داری ہے کہ وہ ایک خاص اسٹاک کی قدر میں تبدیلی کے بارے میں کوئی پیش گوئی کریں، یہ جانتے ہوئے کہ اس کی موجودہ قدر کیا ہے۔ ان میں، اور دوسرے بہت سے مرحلوں میں یہ جاننا ضروری ہے ایک خاص پیرامیٹر دوسرے کسی اور پیرامیٹر کے ساتھ کس طرح بدل رہا ہے۔ اس موضوع کا لب لباب یہ ہے کہ کسی فنکشن کا مشتق لازمی طور پر اس کے معرّف (Defined) علاقہ (Domain) کے ہی کسی دئے ہوئے نقطہ پر ہوتا ہے۔

تعریف 1 مان لیجئے f ایک حقیقی قدر والا فنکشن ہے اور $'a'$ اس کے معرّف کے علاقے میں ایک نقطہ ہے f کے مشتق کی

تعریف نقطہ a پر اس طرح difine کی گئی ہے۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-h(a)}{h}$$

بشرطیکہ یہ انتہا وجود میں ہو۔ $f(x)$ کا مشتق نقطہ 'a' پر $f'(a)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے اس بات کا مشاہدہ کیجئے کہ $f'(a)$، f (x) کی تبدیلی کو a پر x کے ساتھ مقدار دیتا ہے۔

مثال 5 فنکشن $f(x) = 3x$ کا مشتق $x = 2$ پر معلوم کیجئے۔

حل ہمارے پاس ہے

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3(2+h)-3(2)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{6+3h)-6}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3h}{h}=\lim_{h\to 0}3=3$$

فنکشن $3x$ کا $x = 2$ پر مشتق 3 ہے۔

مثال 6 فنکشن $f(x)=2x^2+3x-5$ کا $x=-1$ پر مشتق معلوم کیجئے ساتھ ہی یہ بھی ثابت کیجئے کہ $f'(0)+3f'(-1)=0$ ہے۔

حل ہم پہلے f (x) کا مشتق $x=1$ پر $x=0$ پر معلوم کرتے ہیں۔ ہمارے پاس ہے۔

$$f'(-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(-1+h)^2+3(-1+h)-5\right]-\left[2(-1)^2+3(-1)-5\right]}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2h^2-h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h-1)=2(0)-1=-1$$

اور

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\left[2(0+h)^2+3(0+h)-5\right]-\left[2(0)^2+3(0)-5\right]}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{2h^2+3h}{h}=\lim_{h\to 0}(2h+3)=2(0)+3=3$$

صاف طور پر $f'(0)+3f'(-1)=0$

ریمارک اس وقت یہ نوٹ کر لیجیے کہ مشتق کا ایک نقطہ پر قیمت کا اندازہ لگانے میں مختلف اصولوں کا اثر دار استعمال ہے۔ انتہا بھی اسی پر مبنی ہے۔ ذیل اسے بخوبی بیان کر رہے ہیں۔

مثال 7 $\sin x$ کا $x = 0$ پر مشتق معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $f(x)=\sin x$ تب

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(0+h)-\sin(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}=1$$

مثال 8 $f(x)=3$ کا $x=0$ اور $x=3$ پر مشتق معلوم کیجیے۔

حل کیونکہ مشتق فنکشن میں بدلاؤ کو ناپتا ہے، وجدانی طور پر (intuitively) پر یہ صاف ہے کہ مستقل فنکشن کا مشتق لازمی طور پر ہر نقطے پر صفر ہونا چاہیے۔ حقیقت میں اسے ذیل حسابی حل سے قوت ملی ہے۔

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

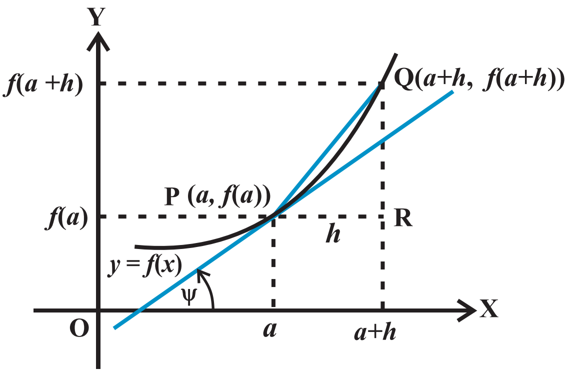
اسی طرح $$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{3-3}{h}=0$$

اب ہم ایک فنکشن کا ایک نقطہ پر مشتق کا جیومیٹریائی ترجمانی/تعبیر پیش کریں گے۔ مان لیجیے $y = f(x)$ ایک فنکشن ہے اور مان لیجیے

$\mathrm{P}=(a, f(a))$ اور

$Q=(a+h, f(a+h))$

آپس میں دو قریبی نقطے میں اس فنکشن کے گراف پر۔ شکل: 13.11 بخوداس بات کی وضاحت کر رہی ہے۔



شکل 13.11

ہم جانتے ہیں کہ

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

مثلث **PQR** سے یہ صاف ہے کہ اس انتہا کی نسبت جسے ہم an(**PQR**) کے باضابطہ برابر لے رہے ہیں جو کہ قوسی وتر **PQ** کا سلوپ ہے۔ انتہا کے عمل میں h 'o' کی طرف بڑھتا ہے۔ نقطہ **Q**، **P** کی طرف بڑھتا ہے اور ہمارے پاس ہے۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{\mathrm{Q}\to \mathrm{P}}\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{PR}}$$

یہ اس حقیقت کے برابر ہے کہ قوسی وتر **PQ**، نقطہ **P** پر مماس (tangent) کی طرف بڑھتا ہے منحنی $y=f(x)$ اس لیے انتہا مماس کے سلوپ کے برابر ہو جائے گی۔ اس لیے

$$f'(a)=\tan\psi$$

دیئے ہوئے فنکشن کے لیے ہم ہر نقطے پر مشتق دریافت کر سکتے ہیں۔ اگر ہر نقطے پر مشتق موجود ہے، یہ ایک نئے فنکشن کی تعریف بیان کرتا ہے جیسے ہم 'f' کا مشتق کہتے ہیں۔ رسمی طور پر ہم فنکشن کے مشتق کو ذیل طرح سے بیان کرتے ہیں۔

تعریف 2 مان لیجیے 'f' ایک حقیقی قدر والا فنکشن ہے، فنکشن کی تعریف اس طرح بیان کی گئی ہے۔

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

جہاں جہاں انتہا موجود ہے اسے x کا مشتق کہتے ہیں اور اسے $f'(x)$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ مشتق کی اس تعریف کو مشتق کا پہلا اصول (*First Principle of derivative*) بھی کہا جاتا ہے۔

اس طرح $$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

صاف طور پر $f'(x)$ کی تعریف کا علاقہ وہ جگہ ہے جہاں جہاں انتہا موجود ہے۔ فنکشن کے مشتق کے لیے مختلف

علامات ہیں۔ کئی بار $f'(x)$ کو $\frac{d}{dx}\left(f(x)\right)$ یا اگر $y = f'(x)$ ہو تو اسے $\frac{dy}{dx}$ سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ اسے $f'(x)$ یا y کے مشتق کے طور پر ظاہر کیا جاتا ہے x کی مطابقت کے طور پر۔ اسے $D[f(x)]$ سے بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔ اس کے آگے، f کے مشتق کو $x = a$ پر $\left.\frac{df}{dx}\right|_a$ or $\left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_a$ یا $\left(\frac{df}{dx}\right)_{x=a}$ اس طرح بھی ظاہر کیا جاتا ہے۔

مثال 9 $f(x) = 10x$ کا مشتق معلوم کیجیے۔

حل کیونکہ
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{10(x+h)-10(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{10h}{h} = \lim_{h\to 0}(10) = 10$$

مثال 10 $f(x) = x^2$ کا مشتق معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے،
$$f'(x\_ = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-(x)^2}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x$$

مثال 11 مستقل فنکشن $f(x) = a$ کا مشتق معلوم کیجیے کسی مقرر حقیقی عدد a کے لیے۔

حل ہمارے پاس ہے۔
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
$$\lim_{h\to 0}\frac{a-a}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0}{h} = 0 \text{ as } h \neq 0$$

مثال 12 $f(x) = \frac{1}{x}$ کا مشتق معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے
$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{(x+h)} - \frac{1}{x}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{-h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}$$

13.5.1 تفاعلات کے مشتق کا الجبرا (Algebra of derivative of functions)

کیونکہ مشتق کی ہر تعریف میں انتہا براہ راست فیشن میں شامل ہے، ہم مشتق کے اصولوں پر حدود کے قریب عمل کی امید کرتے ہیں۔ ہم انہیں ذیل مسئلہ میں اکھٹا کرتے ہیں۔

مسئلہ 5 مان لیجیے f اور g دو فنکشن ہیں تا کہ ان کے مشتق یکساں حدود میں بیان کیے جاسکیں۔ تب

(i) دو فنکشن کے جوڑ کا مشتق فنکشنوں کے مشتق کے جوڑ کے برابر ہے۔

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)+g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

(ii) دو فنکشنوں کے فرق کا مشتق، فنکشن کے مشتقات کے فرق کے برابر ہے۔

$$\frac{d}{dx}\left[f(x)-g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

(iii) دو فنکشنوں کے حاصل ضرب کا مشتق ذیل حاصل ضرب کے اصول سے دیا گیا ہے۔

$$\frac{d}{dx}\left[f(x) \,.\, g(x)\right] = \frac{d}{dx}f(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, \frac{d}{dx}g(x)$$

(iv) دو فنکشنوں کے خارج قسمت کا مشتق ذیل خارج قسمت کے اصول سے دیا گیا ہے (جب کہ نسب نماں غیر صفر ہے)

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\frac{d}{dx}f(x) \,.\, g(x) - f(x)\,\frac{d}{dx}g(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

ان کے ثبوت ضروری طور پر مماثل مسئلہ (analogous theorem) کے پیچھے ہیں جو انتہا کے لیے ہے۔ جیسا کہ انتہا کے

کیس میں ہے یہ مسئلہ ہمیں بتاتا ہے کہ کس طرح کچھ خاص قسم کے مشتق کا حساب لگایا جاتا ہے۔ مسئلہ میں آخری دو بیانات کو ذیل فیشن میں دوبارہ اس طرح بیان کیا جاتا ہے جس کی مدد سے دوبارہ اسے آسانی سے یاد کیا جاسکتا ہے۔

مان لیجئے $u = f(x)$ اور $V = g(x)$ تب

$$(uv)' = u'v + uv'$$

اب، ہم کچھ معیاری فنکشوں کے مشتق کو سلجھاتے ہیں۔

یہ دیکھنا آسان ہے کہ فنکشن $f(x) = x$ کا مشتق مستقل فنکشن '1' ہے۔

یہ اس لیے ہے کیونکہ $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{x+h-x}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} 1 = 1$$

ہم اس کا اور اوپر دیئے ہوئے مسئلہ کا استعمال (دس ارکان $x + \ldots + x$) $f(x) = 10x = x + \ldots + x$ کے مشتق کا حساب لگانے کے لیے کرتے ہیں۔ اوپر دیئے ہوئے مسئلہ کے (1) سے

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(x + \ldots + x) \qquad \text{(دس ارکان)}$$

$$= \frac{d}{dx}x + \ldots + \frac{d}{dx}x \qquad \text{(دس ارکان)}$$

$$= 1 + \ldots + 1 \qquad \text{(دس ارکان)} = 10$$

اب ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ اس انتہا کا قیمت کا اندازہ ضربی اصول کے استعمال سے بھی کیا جاسکتا ہے۔ لکھئے $f(x) = 10x = uv$ ، جہاں 'u' ایک مستقل فنکشن ہے جس کی ہر جگہ قدر 10 ہے اور $v(x) = x$ یہاں، $f(x) = 10x = uv$ ہم جانتے ہیں کہ u کا مشتق 0 کے برابر ہے۔ ساتھ ہی $v(x) = x$ کا مشتق '1' ہے اس طرح ضربی اصول سے ہمارے پاس ہے۔

$$f'(x) = (10x)' = (uv)' = u'v + uv' = 0.x + 10.1 = 10$$

اس طرح $f(x) = x^2$ کے مشتق کی بھی قیمت کا اندازہ لگایا جاسکتا ہے۔ ہمارے پاس ہے $f(x) = x^2 = x.x$ اور اس لیے۔

$$\frac{df}{dx}=\frac{d}{dx}(x.x)=\frac{d}{dx}(x).x+x.\frac{d}{dx}(x)$$

$$=1.x+x.1=2x$$

زیادہ عام طور پر، ہمارے پاس مندرجہ ذیل مسئلہ ہیں۔

مسئلہ 6 $f(x)=x^n$ کا مشتق xx^{n-1} ہے کسی بھی مثبت صحیح عدد n کے لیے۔

ثبوت مشتق فنکشن کے لیے ہمارے پاس ہے۔

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

دورکنی مسئلہ بتاتا ہے کہ $(x+h)^n=\left({}^n\mathrm{C}_0\right)x^n+\left({}^n\mathrm{C}_1\right)x^{n-1}h+\ldots+\left({}^n\mathrm{C}_n\right)h^n$ اور اس لیے

اس طرح $(x+h)^n-x^n=h(xx^{n-1}+\ldots+h^{n-1})$

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h\left(nx^{n-1}+\ldots.+h^{n-1}\right)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(nx^{n-1}+\ldots+h^{n-1}\right)=nx^{n-1}$$

متبادل طور پر، اسے ہم استقرا اماله (induction) بھی ثابت کر سکتے ہیں n پر اور ضربی اصول سے جیسا کہ دیا ہوا ہے۔ نتیجہ n =1 کے لیے صحیح ہے، جو کہ پہلے ثابت کیا جا چکا ہے۔ ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{d}{dx}\left(x^n\right)=\frac{d}{dx}\left(x.x^{n-1}\right)$$

$$=\frac{d}{dx}(x).\left(x^{n-1}\right)+x.\frac{d}{dx}\left(x^{n-1}\right)\quad \text{(ضربی اصول سے)}$$

$$=1.x^{n-1}+x.\left((n-1)x^{n-2}\right)\quad \text{(استقرا اماله مفروضہ سے)}$$

$$=x^{n-1}+(n-1)x^{n-1}=nx^{n-1}$$

ریمارک اوپر دیا ہوا مسئلہ x کی تمام طاقتوں کے لیے درست ہے یعنی n کوئی بھی حقیقی عدد ہوسکتا ہے (لیکن اسے ہم یہاں ثابت نہیں کریں گے۔)

13.4.2 کثیر رکنی ارتر گنو میٹریائی فنکشنوں کے مشتق (Derivative of polynomials and trigonometric functions)

ہم ذیل مسئلہ سے شروع کرتے ہیں جو ہمیں کثیر رکنی کے مشتق کو بتاتی ہے۔

مسئلہ 7 مان لیجے $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ ایک کثیر رکنی فنکشن ہے، جہاں تمام $a_i s$ حقیقی اعداد ہیں $a_n \neq 0$ ۔تب مشتق فنکشن اس سے دیا گیا ہے۔

$$\frac{df(x)}{dx} = na_n x^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x^{x-2} + ... + 2a_2 x + a_1$$

اس مسئلہ کا ثبوت صرف مسئلہ 5 کے حصہ (i) اور مسئلہ 6 کو ساتھ رکھنے سے مل جاتا ہے۔

مثال 13 $6x^{100} - x^{55} + x$ کے مشتق کا حساب لگائیے۔

حل اس مسئلہ کا سیدھا استعمال ہمیں بتاتا ہے کہ اوپر دیئے ہوئے فنکشن کا مشتق $600x^{99} - 55x^{54} + 1$ ہے۔

مثال 14 $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + ...x^{50}$ کا مشتق $x = 1$ پر معلوم کیجیے۔

حل اوپر دیئے ہوئے مسئلہ 7 کا سیدھا استعمال بتاتا ہے کہ اوپر دیئے ہوئے فنکشن کا مشتق $1 + 2 + 3x^2 ...50x^{49}$ ہے۔ $x = 1$ پر اس فنکشن کی قدر برابر ہے۔

$$1 + 2(1) + 3(1)^2 + ... + 50(1)^{49} = 1 + 2 + 3 + ... + 50 = \frac{(50)(51)}{2} = 1275$$

مثال 15 $f(x) = \frac{x+1}{x}$ کا مشتق معلوم کیجیے۔

حل صاف طور پر یہ فنکشن define کیا گیا ہے $x = 0$ کے علاوہ ہم خارج قسمت کا اصول استعمال کرتے ہیں جس میں $u = x + 1$ اور $v = x$ ہے۔اس طرح $u' = 1$ اور $v' = 1$ اس طرح

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{x+1}{x}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{u'v-uv'}{v^2}=\frac{1(x)-(x+1)1}{x^2}=-\frac{1}{x^2}$$

مثال 16 sin x کے مشتق معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $f(x)=\sin x$ تب

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{2\cos\left(\frac{2x+h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h}$$ (sin A– sin B کے لیے فارمولے کے استعمال کرکے)

$$=\lim_{h\to 0}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right).\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}=\cos x.1=\cos x$$

مثال 17 tan x کے مشتق معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے $f(x)=\tan x$ تب

$$\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\tan(x+h)-\tan(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)}-\frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x-\cos(x+h)\sin x}{h\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h-x)}{h\cos(x+h)\cos x}$$ [Sin(A+B) کے لیے فارمولے کا استعمال کرکے]

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin h}{h}.\lim_{h\to 0}\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$=1.\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x$$

مثال 18 $f(x) = \sin^2 x$ کے مشتق معلوم کیجئے۔

حل ہمارے پاس اس کی قیمت کا اندازہ لگانے کے لیے لیبنیز کا ضرب کا اصول ہے۔

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin x \sin x)$$

$$= (\sin x)' \sin x + \sin x (\sin x)'$$

$$= (\cos x)\sin x + \sin x(\cos x)$$

$$= 2\sin x \cos x = \sin 2x$$

مشق 13.2

1. $x^2 - 2$ کا $x = 10$ پر مشتق معلوم کیجیے۔
2. $99x$ کا $x = 100$ پر مشتق معلوم کیجیے۔
3. x کا $x = 1$ پر مشتق معلوم کیجیے۔
4. ذیل فنکشنوں کا مشتق اصول اوّل (first principle) سے معلوم کیجیے۔

   (i) $x^3 - 27$ (ii) $(x-1)(x-2)$

   (iii) $\frac{1}{x^2}$ (iv) $\frac{x+1}{x-1}$

5. فنکشن $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + \ldots + \frac{x^2}{2} + x + 1$ کے لیے ثابت کیجیے کہ $f'(1) = 100 f'(0)$ ہے۔
6. $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + \ldots + a^{n-1}x + a^n$ کا مشتق کچھ مقرر حقیقی عدد a کے لیے معلوم کیجیے۔
7. کچھ مستقل a اور b کے لیے ذیل کا مشتق معلوم کیجیے۔

   (i) $(x-a)(x-b)$ (ii) $(ax^2+b)^2$ (iii) $\frac{x-a}{x-b}$

8. $\frac{x^n - a^n}{x-a}$ کا مشتق کسی مستقل عدد a کے لیے معلوم کیجیے۔

.9 ذیل کا مشتق معلوم کیجیے۔

(i) $2x-\frac{3}{4}$ (ii) $\left(5x^3+3x-1\right)\left(x-1\right)$

(iii) $x^{-3}\left(5+3x\right)$ (iv) $x^5\left(3-6x^{-9}\right)$

(v) $x^{-4}\left(3-4x^{-5}\right)$ (iv) $\frac{2}{x+1}-\frac{x^2}{3x-1}$

.10 $\cos x$ کا مشتق اصول اوّل سے معلوم کیجیے۔

.11 ذیل فنکشنوں کا مشتق معلوم کیجیے۔

(i) $\sin x \cos x$ (ii) $\sec x$ (iii) $5\sec x+4\cos x$

(iv) $\operatorname{cosec} x$ (v) $3\cot x+5\operatorname{cosec} x$

(vi) $5\sin x-6\cos x+7$ (vii) $2\tan x-7\sec x$

متفرق مثالیں

مثال 19 'f' کا مشتق اصول اول سے معلوم کیجیے، جہاں 'f' اس طرح دیا گیا ہے۔

(i) $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ (ii) $f(x)=x+\frac{1}{x}$

حل (i) یہ نوٹ کر لیجیے کہ فنکشن $x=2$ پر define نہیں ہے۔ لیکن، ہمارے پاس ہے

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{2(x+h)+3}{x+h-2}-\frac{2x+3}{x-2}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+2h+3)(x-2)-(2x+3)(x+h-2)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(2x+3)(x-2)+2h(x-2)-(2x+3)(x-2)-h(2x+3)}{h(x-2)(x+h-2)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-7}{(x-2)(x+h-2)}=-\frac{7}{(x-2)^2}$$

دوبارہ نوٹ کر لیجیے کہ فنکشن f' ، $x = 2$ پر بھی define نہیں ہے۔

(ii) $x = 0$ پر define نہیں ہے۔ لیکن ہمارے پاس ہے

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\left(x + h + \frac{1}{x+h}\right) - \left(x + \frac{1}{x}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h + \frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h + \frac{x - x - h}{x(x+h)}\right] = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[h\left(1 - \frac{1}{x(x+h)}\right)\right]$$

$$= \lim_{h \to 0}\left[1 - \frac{1}{x(x+h)}\right] = 1 - \frac{1}{x^2}$$

دوبارہ یہ نوٹ کر لیجیے کہ f' ، $x = 0$ پر define نہیں ہے۔

مثال 20 $f(x)$ کا مشتق اصولِ اول سے معلوم کیجیے، جہاں $f(x)$ ہے

(i) $\sin x + \cos x$ (ii) $x \sin x$

حل (i) ہمارے پاس ہے $f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin(x+h) + \cos(x+h) - \sin x - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h + \cos x \cos h - \sin x \sin h - \sin x - \cos x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h(\cos x - \sin x) + \sin x(\cos h - 1) + \cos x(\cos h - 1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h}(\cos x - \sin x) + \lim_{h \to 0} \sin x \frac{(\cos h - 1)}{h} + \lim_{h \to 0} \cos x \frac{(\cos h - 1)}{h}$$

$$= \cos x - \sin x$$

(ii) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)\sin(x+h) - x \sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)(\sin x\cos h+\sin h\cos x)-x\sin x}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)+x\cos x\sin h+h(\sin x\cos h+\sin h\cos x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{x\sin x(\cos h-1)}{h}+\lim_{h\to 0}x\cos x\frac{\sin h}{h}+\lim_{h\to 0}(\sin x\cos h+\sin h\cos x)$$

$$=x\cos x+\sin x$$

مثال 21 مشتق معلوم کیجیے

(i) $f(x)=\sin 2x$ (ii) $g(x)=\cot x$

حل (i) ٹرگنومیٹریہ فارمولہ $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ کو یاد کیجیے۔اس طرح

$$\frac{df(x)}{dx}=\frac{d}{dx}(2\sin x\cos x)=2\frac{d}{dx}(\sin x\cos x)$$

$$=2\left[(\sin x)'\cos x+\sin x(\cos x)'\right]$$

$$=2\left[(\cos x)\cos x+\sin x(-\sin x)\right]$$

$$=2\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)$$

(ii) تعریف کی رو سے $g(x)=\cot x=\dfrac{\cos x}{\sin x}$ ۔اس فنکشن کے لیے ہم خارج قسمت کا اصول استعمال کریں گے جہاں یہ define کیا گیا ہے۔

$$\frac{dg}{dx}=\frac{d}{dx}(\cot x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$=\frac{(\cos x)'(\sin x)-(\cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$=\frac{(-\sin x)(\sin x)-(\cos x)(\cos x)}{(\sin x)^2}$$

$$=-\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\operatorname{cosec}^2 x$$

اس کے متبادل، اس کا حساب اس طرح سے بھی لگایا جاسکتا ہے کہ یہ نوٹ کرلیں کہ $\cot x = \dfrac{1}{\tan x}$ ۔ یہاں، ہم اس حقیقت کا استعمال کریں گے کہ $\tan x$ کا مشتق $\sec^2 x$ ہے جو کہ ہم نے مثال 17 میں دیکھا ہے اور ساتھ ہی مستقل فنکشن کا مشتق '0' ہے۔

$$\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(\cot x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\tan x}\right)$$

$$= \frac{(1)'(\tan x) - (1)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(0)(\tan x) - (\sec x)^2}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{-\sec^2 x}{\tan^2 x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

مثال 22 ذیل کے مشتق معلوم کیجیے

(i) $\dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ (ii) $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$

حل (i) مان لیجیے $h(x) = \dfrac{x^5 - \cos x}{\sin x}$ ۔ اس مشتق پر ہم خارج قسمت کا اصول استعمال کریں گے جہاں جہاں اس کی تعریف بیان کی گئی ہے۔

$$h'(x) = \frac{(x^5 - \cos x)'\sin x - (x^5 - \cos x)(\sin x)'}{(\sin x)^2}$$

$$= \frac{(5x^4 + \sin x)\sin x - (x^5 - \cos x)\cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{-x^5\cos x + 5x^4 \sin x + 1}{(\sin x)^2}$$

(ii) اس فنکشن $\dfrac{x + \cos x}{\tan x}$ پر ہم خارج قسمت کے اصول کا استعمال کریں گے جہاں جہاں اس کی تعریف بیان کی گئی ہے۔

$$h'(x) = \frac{(x + \cos x)'\tan x - (x + \cos x)(\tan x)'}{(\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1-\sin x)\tan x - (x+\cos x)\sec^2 x}{(\tan x)^2}$$

باب 13 پر متفرق مشق

.1 ذیل فنکشنوں کا اصول اول سے مشتق معلوم کیجیے۔

(i) $-x$ (ii) $(-x)^{-1}$ (iii) $\sin(x+1)$ (iv) $\cos(x-\frac{\pi}{8})$

ذیل فنکشنوں کا مشتق معلوم کیجیے۔(یہ سمجھ لینا چاہیے کہ a، b، c، d، p، q، r اور s مقرر غیر صفر مستقل ہیں اور m اور n صحیح اعداد ہیں)

.2 $(x+a)$ .3 $(px+q)\left(\frac{r}{x}+s\right)$ .4 $(ax+b)(cx+d)^2$

.5 $\frac{ax+b}{cx+d}$ .6 $\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}$ .7 $\frac{1}{ax^2+bx+c}$

.8 $\frac{ax+b}{px^2+qx+r}$ .9 $\frac{px^2+qx+r}{ax+b}$ .10 $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$

.11 $4\sqrt{x}-2$ .12 $(ax+b)^n$ .13 $(ax+b)^n(cx+d)^m$

.14 $\sin(x+a)$ .15 $\operatorname{cosec} x \cot x$ .16 $\frac{\cos x}{1+\sin x}$

.17 $\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}$ .18 $\frac{\sec x-1}{\sec x+1}$ .19 $\sin^n x$

.20 $\frac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$ .21 $\frac{\sin(x+a)}{\cos x}$ .22 $x^4(5\sin x-3\cos x)$

.23 $(x^2+1)\cos x$ .24 $(ax^2+\sin x)(p+q\cos x)$

.25 $(x+\cos x)(x-\tan x)$ .26 $\frac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}$ .27 $\frac{x^2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$

28. $\dfrac{x}{1+\tan x}$ 29. $(x+\sec x)(x-\tan x)$ 30. $\dfrac{x}{\sin^n x}$

خلاصہ (Summary)

- فنکشن کی ممکن قدر جیسا کہ نقاط نے درج کرایا ہے نقطے کے بائیں طرف اس نقطے پر فنکشن کی بائیں ہاتھ کی انتہا (left hand limit) کہلاتی ہے۔ اسی طرح دائیں ہاتھ کی انتہا (right hand limit)
- ایک نقطے پر ایک فنکشن کی انتہا دائیں ہاتھ اور بائیں ہاتھ کی انتہا کی مشترک قدر ہے، اگر وہ آپس میں ملتے ہیں۔
- ایک فنکشن f اور ایک حقیقی عدد a کے لیے، $\lim_{x\to a} f(x)$ اور $f(a)$ ممکن ہے یکساں نہ ہوں (حقیقت میں ایک کی تعریف بیان کی جاسکتی ہے اور دوسرے کی نہیں)
- فنکشن f اور g کے لیے ذیل کا اطلاق ہوتا ہے:

$$\lim_{x\to a}[f(x)\pm g(x)]=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}[f(x).g(x)]=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$$

- ذیل کچھ معیاری حدود ہیں۔

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=na^{n-1}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

- فنکشن f کا نقطہ a پر مشتق اس طرح define کیا گیا ہے

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- فنکشن f کسی نقطہ x پر مشتق اس طرح define کیا گیا ہے

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

- فنکشن u اور v کے لیے ذیل کا اطلاق ہوتا ہے۔

$$(u\pm v)'=u'\pm v'$$

$$(uv)'=u'v+uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$ بشرطیہ کے سب کی تعریف بیان کی گئی ہو۔

- مندرجہ ذیل کچھ معیاری مشتقات ہیں

$$\frac{d}{dx}(x^n)=nx^{n-1}$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x)=\cos x$$

$$\frac{d}{dx}(\cos x)=-\sin x$$

تاریخ کے اوراق سے (Historical Note)

ریاضی کی تاریخ میں دو نام سرفہرست ہیں جنھیں آپس میں احصا (calculus) کی ایجاد کا شرف حاصل ہے، اسحاق نیوٹن (Issac Newton) (1642–1727) اور جی. ڈبلیو. لیبنیز (G.W.Leibnitz) (1646–1717)۔ دونوں نے احصا کو آزادانہ طور پر سترہویں صدی میں ایجاد کیا تھا۔ احصا کی ایجاد کے بعد بہت سے ریاضی دانوں نے احصا کی آگے فلاح و بہبود کے لیے بہت کام کیا ہے۔ ریاضی داں اے. ایل. کوشی (A.L.Cauchy)، جے. ایل. لیگرانجی (J.L.Lagrange) اور کارل ویلس ٹراس (Karl Weierstrass) نے خاص طور پر سختی سے اس کا تصور کیا ہے۔ کوشی نے احصا کا اساس دیا ہے جیسا کہ ہم عام طور پر اپنی کتابوں میں تسلیم کر چکے ہیں۔ کوشی نے ڈی–المبرٹس (D' Alembert's) انتہا کے تصور کا استعمال کیا ہے۔ ایک فنکشن کے مشتق کو define کرنے کے لیے۔ انتہا کی تعریف سے شروع کر کے، کوشی نے مثالیں دیں۔ مثال کے طور پر $\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ کی انتہا کی کسی $\alpha = 0$ کے لیے۔ اس نے لکھا، $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ اور

$i \to 0,$ کے لیے انتہا کہا گیا۔ ”فنکشن نکالا گیا $e, y', f'(x)$ کے لیے۔“

1900 A.D. سے پہلے یہ خیال تھا کہ احصا کا پڑھانا کافی مشکل ہے۔ اس لیے احصا نوجوانوں کی پہنچ سے باہر ہوگا۔ لیکن ٹھیک 1900 A.D. میں جون پیری (John Perry) اور دوسروں نے انگلینڈ میں یہ پروپیگنڈا کرنا شروع کر دیا کہ احصا کے ضروری خیالات اور طریقے آسان تھے اور انہیں اسکول میں بھی پڑھایا جاسکتا ہے۔ ایف.ایل.گریفن (F.L.Griffin) نے احصا کو پہلے سال کے طلبا کو احصا پڑھانا شروع کر دیا۔ ان دنوں یہ سب سے زیادہ ہمت والا عمل تھا۔

آج یہ صرف ریاضی میں ہی نہیں بلکہ دوسرے اور مضامین میں جیسے فزکس (Physics)، کیمسٹری (Chemistry)، اکونومکس (Economics) اور بائیلوجیکل سائنس (Biological Sciences) وغیرہ احصا کے استعمال سے بخوبی لطف اندوز ہو رہے ہیں۔