باب 11

مخروطی تراشے
(CONIC SECTIONS)

❖ ”معلومات کا اصل زندگی سے رشتہ **(Relation)** ہمارے بچوں (شاگردوں)پر بخوبی واضح ہونا چاہئے۔انھیں یہ بھی سمجھنے کا موقع فراہم کیا جائے کہ دنیا علم (معلومات) کی بدولت کس طرح تغیر پذیر ہو سکی (برٹ رانڈ رسل) **(BERTRAND RUSSEL)** ❖

11.1 تعارف (Introduction)

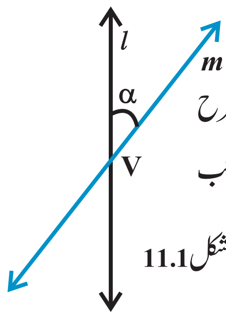
اپولونیس
(262.B.C.-190 B.C.)

ہم پچھلے باب 10 میں خط کی مساوات کی مختلف شکلوں کے بارے میں پڑھ چکے ہیں۔اس باب میں ہم کچھ منحنیوں مثلاً دائروں ،ناقصوں (Ellipses)مکافی (Parabols)اور زائدہ(Hyperbolas)کے بارے میں پڑھیں گے۔Parabola اور Hyperbola نام اپولونیس (Appollonius) نے دئے ہیں۔دراصل ان منحنیوں(Curves) کومخروطی تراشے کہتے ہیں کیونکہ انھیں ایک مستوی(Plane) اور دوہرے قائم دائری مخروطی تقاطع(Intersaction)سے حاصل کیا گیا ہے۔ان منحنیوں کے استعمال (Application) کا میدان کافی وسیع ہے مثلاً احسامی نظام کی حرکت،دوربین اور اینٹینا کے ڈیزائن(Disign)ریفلیکٹرس(Reflecters)،فلیش لائٹ اور گاڑیوں(Automobiles)کے ہیڈ لائٹس وغیرہ وغیرہ۔اب ہم اگلے حصہ میں دیکھیں گے کہ کس طرح ایک مستوی(Plane)اور ایک دوہری قائم دائری مخروط کے کاٹنے(Intersaction)میں کتنی طرح کی منحنیاں بنتی ہیں۔

مخروط کے تراشے (Sections of a Cone)

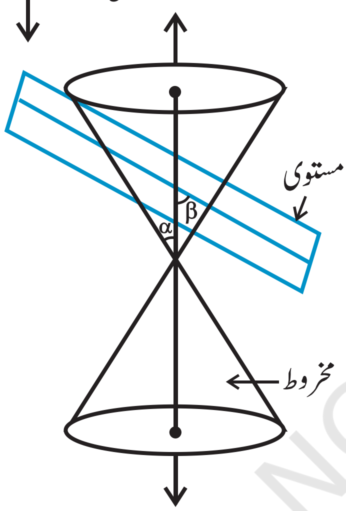
مان لیجیے کہ l ایک ساکن راسی خط ہے اور m ایک دوسرا خط ہے جو l کو نقطہ V پر کاٹتا ہے اور زاویہ α بناتا ہے

(شکل11.1)

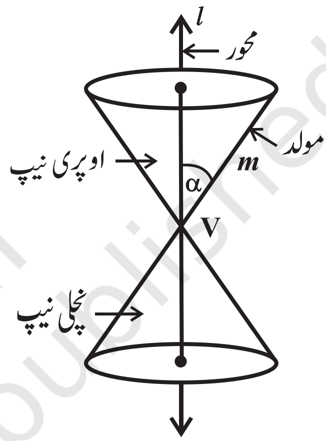


شکل11.1

فرض کیا کہ خط m کو l کے گرد اس طرح گھومایا جائے کہ زاویہ α ہمیشہ قائم رہے۔اس طرح جو سطح وجود میں آتی ہے وہ ایک دوہرا قائم دائری مخروط ہے جو بعد میں مخروط کہلاتا ہے جو دونوں جانب لامحدود طور پر پھیلا ہوا ہے۔(شکل11.2)



شکل11.3



شکل11.2

نقطہ V راس (Vertex)،خط l مخروط کا محور (axis) اور گھومنے والا خط m مخروط کا مولد (Generater) کہلاتا ہے۔راس V مخروط کو دو حصوں میں بانٹتا ہے جنھیں ہم نیپس (Nappes) کہتے ہیں۔

اگر ہم ایک مستوی (plane) کا ایک مخروط کا تقاطع (Intersaction) لیں تو اس طرح حاصل شدہ تراشہ (Section) مخروطی تراشہ کہلاتا ہے اس لئے مخروطی تراشے وہ منحنیاں ہیں جو ایک قائم دائری مخروط کو ایک مستوی کے تراشنے (کاٹنے) سے بنتی ہیں۔

ہمیں مختلف طرح کے مخروطی تراشے ملتے ہیں جن کا انحصار تراشنے والی مستوی اور مخروط کے راسی محور کے درمیانی زاویہ پر ہوتا ہے فرض کیا کہ وہ زاویہ β ہے جو تراشنے والی مستوی اور مخروط کے راسی محور کے درمیان بنتا ہے۔(شکل11.3)

مستوی کی یہ تراش (Intersaction) مخروط پر یا تو راس (Vertex) پر یا پھر نیپ کے کسی بھی حصہ پر راس کے نیچے یا راس کے اوپر ہوسکتی ہے۔

11.2.1 دائرہ (Circle)، ناقص (ellipse)، مکافی (parabola) اور زائد (hyperbola) جب

کبھی مستوی مخروط کی نیپ کو (راس کے علاوہ) تراشتی ہے تو درج ذیل حالات پیش آتے ہیں۔

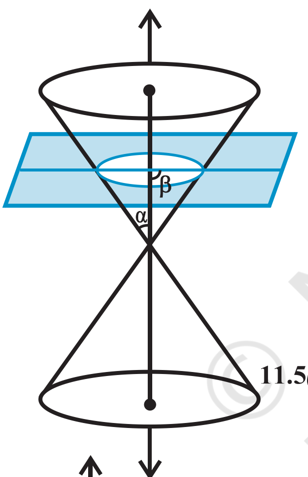
(a) جب $\beta = 90^\circ$ تب تراش (saction) ایک دائرہ ہوتی ہے (شکل 11.4)

(b) جب $\alpha < \beta < 90^\circ$ تب تراش ایک ناقص (ellipse) ہوتی ہے (شکل 11.5)

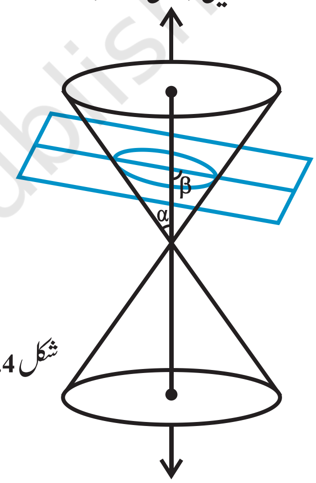
(c) جب $\alpha = \beta$ تب تراش ایک مکافی (parabola) (شکل 11.6)

مندرجہ بالا تینوں حالات میں، مستوی مکمل طور پر مخروط کی محض ایک ہی نیپ کو ادھر سے ادھر تراشتی ہے

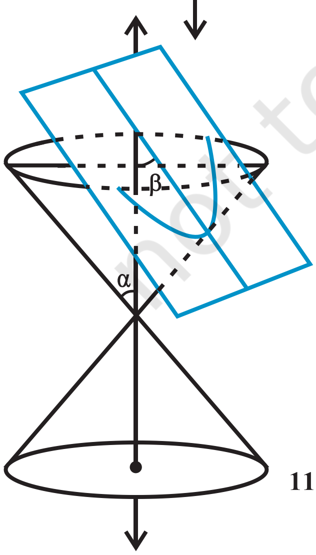
(d) جب $0 \le \beta < \alpha$ تب مستوی مخروط کے دونوں نیپس کو ادھر سے ادھر کاٹتی ہے تب تراش کے منحنی زائد (Parabola) ہوتے ہیں (شکل 11.7)



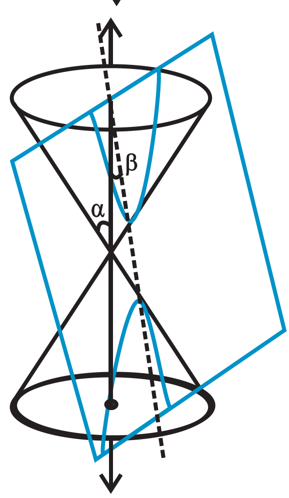
شکل 11.5



شکل 11.4



شکل 11.7



شکل 11.6

11.2.2 بگڑے ہوئے مخروطی سیکشن Degenerated conic sections

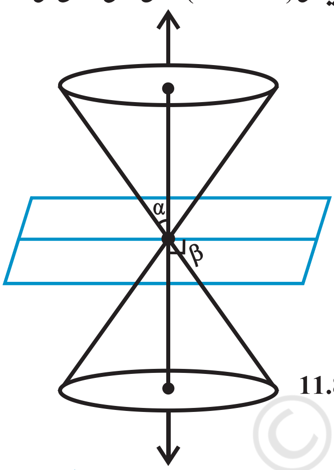
ایک مستوی مخروط کے راس پر کاٹتی ہے، ہمارے پاس ذیل مختلف کیس ہوتے ہیں۔

(a) جب $\alpha < \beta \le 90^\circ$، تب سیکشن ایک نقطہ ہے (شکل 11.8)

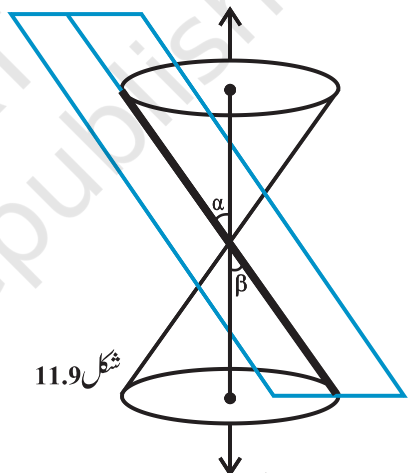
(b) جب $\beta = \alpha$، تب مستوی میں ایک مخروط کا ایک مولد (generater) موجود ہوتا ہے اور سیکشن ایک سیدھا خط ہوتا ہے (شکل 11.9) یہ مکافی کا بگڑا ہوا کیس ہے۔

(c) جب $0 \le \beta < \alpha$ تب سیکشن کاٹتی ہوئی سیدھی لائنوں کا ایک جوڑا ہے۔ (شکل 11.10) یہ زائد کا بگڑا ہوا کیس ہے۔

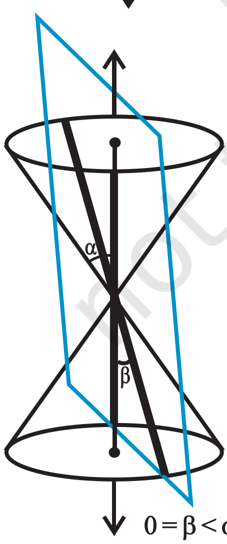
ذیل سیکشنوں میں ہم ان سبھی مخروطی سیکشن کی مساوات حاصل کریں گے جو معیاری (standard) شکل میں ہوں گی اور جیومیٹریائی خصوصیت پر مبنی ہوں گی۔



شکل 11.8

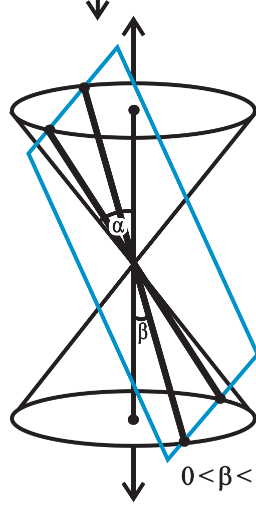


شکل 11.9



$0 = \beta < \alpha$

(a)



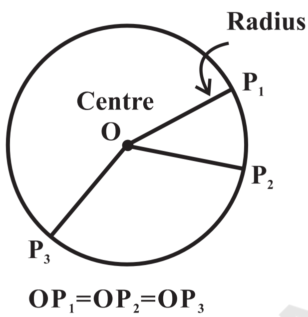
$0 < \beta < \alpha$

(b)

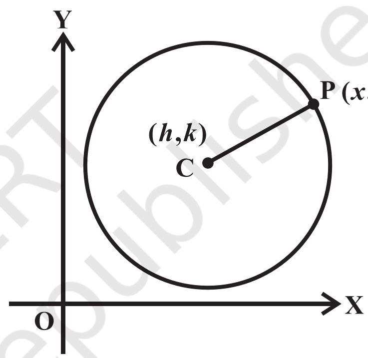
11.3 دائرہ (Circle)

تعریف 1 ایک دائرہ مستوی میں ان تمام نقاط کا سیٹ ہے جو اس مستوی میں ایک ساکن نقطہ سے ہم فاصلہ ہوں۔
ساکن نقطہ دائرہ کا مرکز کہلاتا ہے اور مرکز سے دائرہ پر واقع کسی بھی نقطے کے درمیان کا فاصلہ دائرہ کا نصف قطر کہلاتا ہے۔
(شکل 11.11)

دائرہ کا مرکز مبدا پر ہو تو دائرہ کی مساوات سب سے آسان ہوتی ہے۔ حالانکہ نیچے ہم اس دائرہ کی مساوات نکال رہے ہیں جس میں دائرہ کا مرکز اور نصف قطر دیا گیا ہے۔ (شکل 11.12)



شکل 11.11



شکل 11.12

دائرہ کا مرکز $C(h, k)$ اور نصف قطر r دیا گیا ہے۔ مان لیجیے $P(x, y)$ دائرہ پر کوئی بھی نقطہ ہے (شکل 11.12)
تب تعریف سے $|CP| = r$ ، فاصلہ کے فارمولے سے ہمارے پاس ہے

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$$

یعنی $\quad (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad$ *i.e.*

یہ دائرہ کی مطلوبہ مساوات جس کا مرکز (h, k) اور نصف قطر r ہے۔

مثال 1 اس دائرہ کی مساوات معلوم کرو جس کا مرکز (0,0) پر ہو اور نصف قطر r ہو۔

حل یہاں $h = k = 0$ اس لیے دائرہ کی مساوات $x^2 + y^2 = r^2$ ہے۔

مثال 2 اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز $(-3, 2)$ اور نصف قطر 4 ہے۔

حل یہاں $h = -3$، $k = 2$ اور $r = 4$ ہے۔اس لیے مطلوبہ دائرہ کی مساوات ہے۔

$$(x+3)^2 + (y-2)^2 = 16$$

مثال 3 اس دائرہ کا مرکز اور نصف قطر معلوم کیجیے جس کی مساوات $x^2 + y^2 + 8x + 10y - 8 = 0$ ہے۔

حل دی ہوئی مساوات ہے

$$(x^2 + 8x) + (y^2 + 10y) = 8$$

اب بریکٹس میں مربع مکمل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(x^2 + 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 8 + 16 + 25$$

یعنی
$$(x+4)^2 + (y+5)^2 = 49$$

یعنی
$$\{x-(-4)\}^2 + \{y-(-5)\}^2 = 7^2$$

اس لیے دیے ہوئے دائرہ کا مرکز $(-4, -5)$ ہے اور نصف قطر 7 ہے۔

مثال 4 اس دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو $(2, -2)$ اور $(3, 4)$ نقاط سے گزر رہا ہے اور اس کا مرکز خط $x + y = 2$ پر واقع ہے۔

حل مان لیجیے دائرہ کی مساوات ہے $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

کیونکہ دائرہ $(2, -2)$ اور $(3, 4)$ سے گزر رہا ہے۔ ہمارے پاس ہے

$$(2-h)^2 + (-2-k)^2 = r^2 \quad \text{(1)...}$$

اور
$$(3-h)^2 + (4-k)^2 = r^2 \quad \text{(2)...}$$

ساتھ ہی کیونکہ مرکز خط $x + y = 2$ پر واقع ہے، ہمارے پاس ہے

$$h + k = 2 \quad \text{(3)...}$$

مساوات (1)، (2) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$h = 0.7$، $k = 1.3$ اور $r^2 = 12.58$

اس طرح مطلوبہ دائرہ کی مساوات ہے

$$(x-0.7)^2+(y-1.3)^2=12.58$$

مشق 11.1

مندرجہ ذیل 1 تا 5 ہر مشق میں دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس میں

.1 مرکز $(0,2)$ اور نصف قطر 2 ہے

.2 مرکز $(-2,3)$ اور نصف قطر 4 ہے

.3 مرکز $(\frac{1}{2},\frac{1}{4})$ اور نصف قطر $\frac{1}{12}$ ہے

.4 مرکز $(1,1)$ اور نصف قطر $\sqrt{2}$ ہے

.5 مرکز $(-a,-b)$ اور نصف قطر $\sqrt{a^2-b^2}$ ہے

ذیل میں دی گئی مشقوں 6 تا 9 میں دائروں کا مرکز اور نصف قطر معلوم کیجیے۔

.6 $(x+5)^2+(y-3)^2=36$

.7 $x^2+y^2-4x-8y-45=0$

.8 $x^2+y^2-8x-10y-12=0$

.9 $2x^2+2y^2-x=0$

.10 دائرے کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط $(4,1)$ اور $(6,5)$ سے ہو کر گزر رہا ہے اور جس کا مرکز خط $4x+y=16$ پر واقع ہے۔

.11 دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو نقاط $(2,3)$ اور $(-1,1)$ سے ہو کر گزر رہا ہے اور جس کا مرکز خط $x-3y-11=0$ پر واقع ہے۔

.12 دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا نصف قطر 5 اور جس کا مرکز x-axis پر واقع ہے اور جو نقطہ $(2,3)$ سے ہو کر گزر رہا ہے۔

.13 دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جو $(0,0)$ سے گزر رہا ہے اور مختص محاور پر مقطوعہ (intercepts) a اور b بنا رہا ہے۔

.14 دائرہ کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مرکز $(2,2)$ ہے اور نقطہ $(4,5)$ سے گزر رہا ہے۔

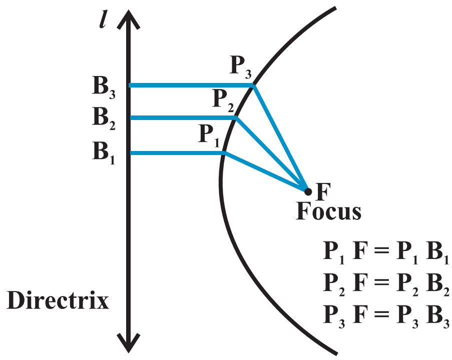
.15 کیا نقطہ $(-2.5,3.5)$ دائرہ $x^2+y^2=25$ کے بیرون، اندر یا بذات خود دائرہ پر واقع ہے۔

11.4 مکافی (Parabola)

تعریف 2 مکافی مستوی میں ان تمام نقاط کا سیٹ ہے جو اس مستوی میں ایک ساکن خط اور ایک ساکن نقطے سے (جو خط پر

موجود نہیں ہے) ہم فاصلہ ہوں۔

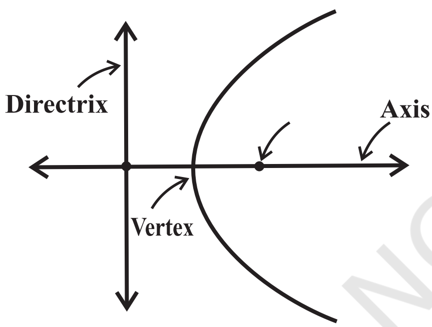
ساکن خط مکافی کا ہادی خط (directrix) کہلاتا ہے اور ساکن نقطہ F ماسکہ (Focus) کہلاتا ہے (شکل 11.13)۔ 'para' کا مطلب ہے کیلئے اور 'bola' کا مطلب ہے پھینکنا، اس کا مطلب ہے جب آپ ایک گیند کو ہوا میں پھینکتے ہیں تو اس وقت بنی شکل۔



شکل 11.14

> **نوٹ** اگر ساکن نقطہ ساکن خط پر واقع ہے، تب مستوی میں نقاط کا سیٹ، جو ساکن نقطے سے برابر کی دوری پر ہیں اور ساکن خط ساکن نقطے سے سیدھا خط ہے اور ساکن خط پر عود ہے، ہم اس سیدھے خط کو مکافی (Parabola) کی بگڑی ہوئی حالت کہتے ہیں۔

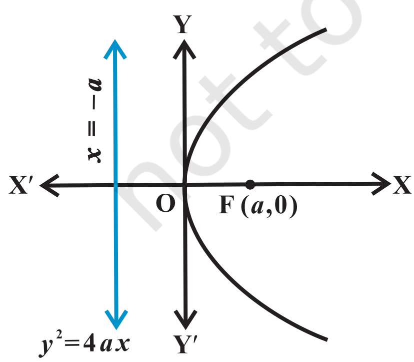
ایک خط جو (Focus) ماسکہ سے ہوکر گزر رہا ہے اور ہادی خط پر عمود ہے پیرابولا کا محور یا تشاکل کا محور کہلاتا ہے۔ پیرابولا کا محور کے ساتھ نقطہ تقاطع پیرابولا کا راس (vertax) کہلاتا ہے۔ (شکل 11.14)



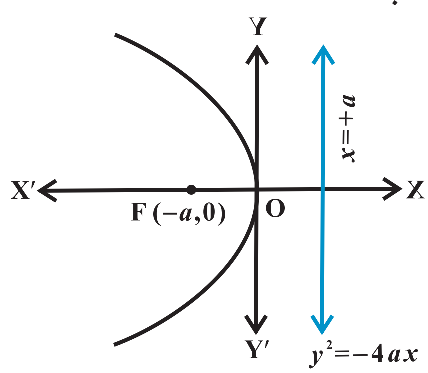
شکل 11.13

11.14.1 مکافی (پیرابولا) کی معیاری مساواتیں *Standard equations of parabola*

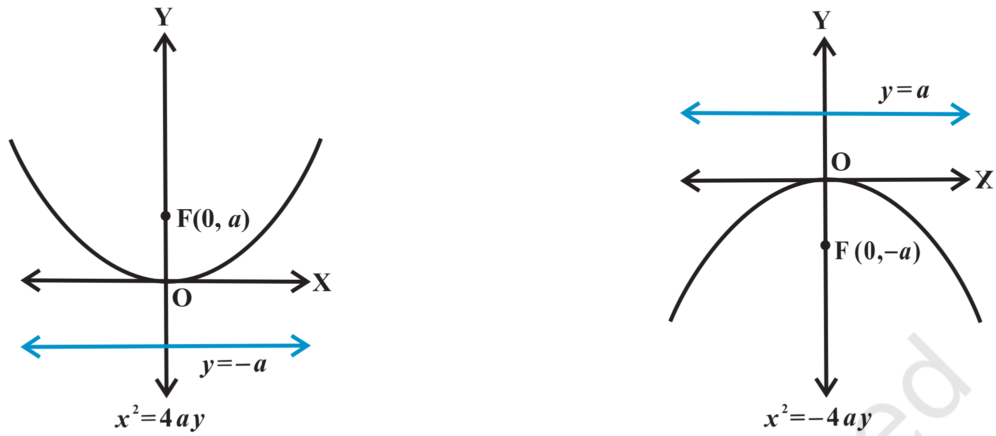
مکافی کی مساوات بہت آسان ہے اگر راس مبدا پر ہو اور تشاکل (Symmetry) کا محور x-axis کے ساتھ ہو یا y-axis کے۔ اس طرح کے چار ممکن مکافی کے مقصدی تعین (orientations) ذیل شکل 11.15 میں (a) تا (d) تک دکھائے گئے ہیں۔



(a)



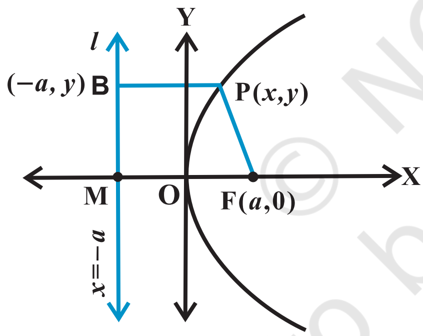
(b)



(c) (d)

شکل 11.15

ہم مندرجہ بالا شکل 11.15 (a) میں مکافی (parabola) کے لئے مساوات نکالیں گے جس کا ماسکہ (focus) $(a, 0)$ $a > 0$ پر ہے اور ہادی خط (directrix) $x = -a$ ہے جیسا کہ نیچے دیا گیا ہے۔



شکل 11.16

مان لیجیے 'F' ماسکہ ہے اور l ہادی خط ہے۔ مان لیجے FM حادی خط پر عمود ہے اور FM کو 0 پر دو برابر حصوں میں کاٹتا ہے۔ MO کو X سے ملایئے۔ مکافی کی تعریف سے، درمیانی نقطہ '0' مکافی پر ہے اور مکافی کا راس کہلاتا ہے۔ '0' کو مبدا کے طور پر لیجیے۔ OX کو x-axis اور OY کو اس پر عمود y-axis کی طرح، مان لیجیے ہادی خط سے فوکس کا فاصلہ $2a$ ہے۔ تب، ماسکہ (Focus) کے مختص $(a, 0)$ ہیں اور ہادی خط کی مساوات $x + a = 0$ ہے جیسا کہ شکل 11.16 میں ہے۔ مان لیجیے $P(x, y)$ مکافی پر کوئی نقطہ ہے تا کہ

$$PF = PB \qquad \ldots(1)$$

جہاں PB، l پر عمود ہے۔ B کے مختص ہیں $(-a, y)$۔ فاصلہ کے فارمولے سے ہمارے پاس ہے

$$PB = \sqrt{(x+a)^2} \quad \text{اور} \quad PF = \sqrt{(x-a)^2 + y^2}$$

کیونکہ $PF = PB$ ہمارے پاس ہے

$$\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x+a)^2}$$

یعنی
$$(x-a)^2+y^2=(x+a)^2$$

یا
$$x^2-2ax+a^2+y^2=x^2+2ax+a^2$$

یا
$$y^2=4ax\,(a>0)$$

اس لیے مکافی پر کوئی بھی نقطہ مطمئن کرتا ہے

$$y^2=4ax \qquad (2)\ldots$$

اس کے برعکس مان لیجیے نقطہ $\mathrm{P}(x,y)$ مساوات (2) کو مطمئن کرتا ہے، تب

$$\mathrm{PF}=\sqrt{(x-a)^2+y^2}=\sqrt{(x-a)^2+4ax}$$

$$=\sqrt{(x+a)^2}=\mathrm{PB} \qquad (3)\ldots$$

اور اس طرح $\mathrm{P}(x,y)$ مکافی پر واقع ہے۔

اس لیے (2) اور (3) سے ہم نے ثابت کر دیا ہے کہ مکافی کی مساوات جس میں راس مبدا پر ہو، ماسکہ (focus) $(a,0)$ پر اور ہادی خط $x=-a$ ہو، $y^2=4ax$ ہے۔

بحث ومباحثہ (Discussion) مساوات (2) میں کیونکہ $a>0$، x کی کوئی بھی مثبت قدر ہو سکتی ہے یا صفر لیکن منفی قدر نہیں ہوگی اور منحنی پہلے اور چوتھے رابع (quadrant) میں لامحدود بڑھتا ہے۔ مکافی کا محور مثبت x-axis ہے۔

اسی طرح ہم مکافی کی مساوات نکال سکتے ہیں

شکل 11.15 (b) جیسا کہ $y^2=-4ax$،

شکل 11.15 (c) جیسا کہ $x^2=4ay$،

شکل 11.15 (d) جیسا کہ $x^2=-4ay$،

یہ چار مساواتیں مکافیوں کی معیاری مساواتیں (standard equation) کہلاتی ہیں۔

نوٹ مکافیوں (parabolas) کی معیاری مساواتیں کا ماسکہ ایک مختص محور پر ہے؛ راس مبدا پر اور پھر وہاں سے ہادی

خط مختص محور کے متوازی ہے۔ حالانکہ مکافیوں کی مساواتوں کی پڑھائی جس میں مساسکہ کسی بھی نقط پر ہو اور کوئی بھی ایک ہادی خط کی طرح ہو یہاں ہماری حد کے باہر ہے۔

مکافیوں کی معیاری مساواتوں، شکل 11.15، ہمارے پاس ذیل مشاہدے (observations) ہیں:

1. مکافی متشاکل (symmetric) ہے مکافی کے محور کے حوالے سے۔ اگر مساوات میں y^2 رکن ہے، تب تشاکل کا محور x-axis کے ساتھ ہے اور اگر مساوات میں x^2 رکن ہیں تب تشاکل کا محور y-axis کے ساتھ ہے۔
2. جب تشاکل محور x-axis کے ساتھ ہو مکافی (parabola) اس طرح کھلتا ہے۔
   (a) دائیں طرف اگر x کا ضریب مثبت ہے۔
   (b) بائیں طرف اگر x کا ضریب منفی ہے۔
3. جب تشاکل کا محور Y-axis کے ساتھ ہو تو مکافی اس طرح کھلتا ہے۔
   (a) اوپر کی طرف اگر y کا ضریب مثبت ہو۔
   (b) نیچے کی طرف اگر y کا ضریب منفی ہو۔

11.4.2 لیٹس ریکٹم LATUS RECTUM

تعریف 3 مکافی کا لیٹس ریکٹم وہ قطع خط ہے جو مکافی کے محور پر فوکس سے گذرنے والا عمود ہے اور جس کے انتہائی نقطے مکافی پر واقع ہیں۔ (شکل 11.17)

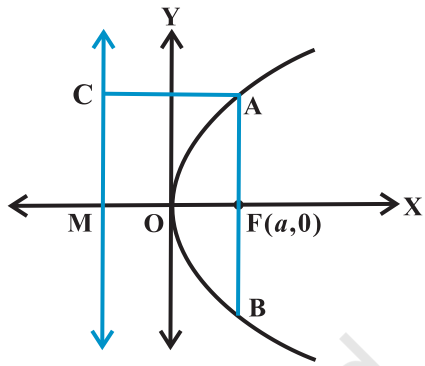
''مکافی $y^2 = 4ax$ (شکل **11.18**) کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کرنا''

مکافی کی تعریف سے AF=AC

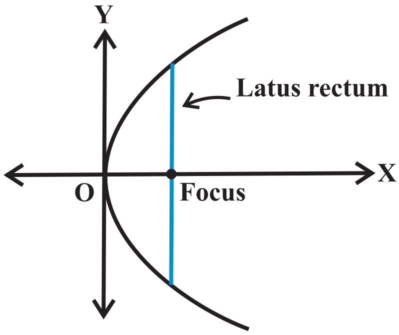
لیکن AC=FM=2a

اس لیے AF=2a

اور کیونکہ مکافی x-axis کے ساتھ متشاکل ہے AF=FB اور اس لیے AB= لیٹس ریکٹم کی لمبائی = 4a

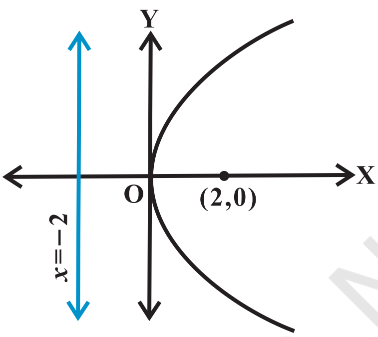


شکل 11.17



شکل 11.18

مثال 5 ماسکہ، محور کے مختص معلوم کیجیے، ہادی خط کی مساوات اور مکافی ، $y^2 = 8x$ کا لیٹس ریکٹم معلوم کیجیے؟



شکل 11.19

حل دی ہوئی مساوات میں y^2 شامل ہے، اس لیے تشاکل کا محور x-axis کے ساتھ ہے۔

کیونکہ x کا ضریب مثبت ہے اس لیے مکافی دائیں طرف کھلتا ہے۔ دی ہوئی مساوات $y^2 = 4ax$ کے ساتھ ملانے پر ہمیں $a = 2$ حاصل ہوتا ہے۔

اس لیے مکافی کا ماسکہ (2,0) ہے اور مکافی کے ہادی خط کی مساوت $x = -2$ ہے (شکل: 11.19) لیٹس ریکٹم کی لمبائی $4a$ ہے $= 2 \times 4 = 8$

مثال 6 مکافی کی مساوات معلوم کیجیے جس کا ماسکہ (Focus) (2,0) ہے اور ہادی خط $x = -2$ ہے۔

حل کیونکہ ماسکہ (2,0) x-axis پر واقع ہے۔ x-aixs بخود مکافی کا محور ہے۔ یہاں مکافی کی مساوات یا تو $y^2 = 4ax$ کی قسم کی ہے یا $y^2 = -4ax$ کی۔ کیونکہ ہادی خط $x = -2$ ہے اور ماسکہ (2,0) ہے، مکافی $y^2 = 4ax$ کی طرح کا ہے جس میں $a = 2$ ہے۔ یہاں مطلوبہ مساوات ہے،

$$y^2 = 4(2)x = 8x$$

مثال 7 مکافی کی مساوات معلوم کیجیے جس کا راس (0,0) پر ہے اور ماسکہ (0,2) پر ہے۔

حل کیونکہ راس (0,0) پر ہے اور ماسکہ (0,2) پر جو کہ y-axis پر واقع ہے، y-axis مکافی کا محور ہے۔ اس لیے مکافی کی مساوات $x^2 = 4ay$ کی طرح ہے۔ اس طرح، ہمارے پاس ہے۔ $x^2 = 4(2)y,\ i.e. = x^2 = 8y$

مثال 8 اس مکافی کی مساوات معلوم کیجیے جو y-axis پر متشاکل ہے، اور نقطہ (2,-3) سے ہوکر گزر رہا ہے۔

حل کیونکہ مکافی y-axis کے متشاکل ہے اور اس کا راس مبدا پر ہے، مساوات کی قسم $x^2 = 4ay$ یا $x^2 = -4ay$ کی طرح کی ہے، جہاں نشان اس بات پر مبنی ہے کہ آیا مکافی اوپر کی طرف کھل رہا ہے یا نیچے کی طرف۔ لیکن مکافی (2,-3) سے ہوکر گزر رہا ہے جو کہ چوتھے ربع میں واقع ہے، یہ نیچے کی طرف کھلنا چاہیئے۔ اس لیے مساوات $x^2 = -4ay$ کی طرح کی ہے۔

کیونکہ مکافی (2,-3) سے ہوکر گزر رہا ہے، ہمارے پاس ہے۔

$$2^2 = -4a(-3),\ i.e.\ a = \frac{1}{3}$$

اس لیے مکافی کی مساوات ہے۔

$$x^2 = -4\left(\frac{1}{3}\right)y,\ i.e.\ 3x^2 = -4y$$

مشق 11.2

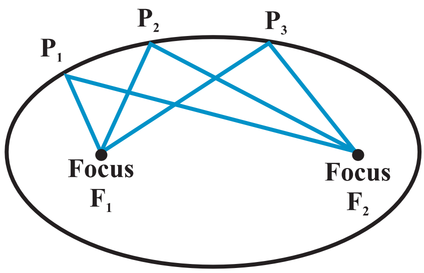
1 تا 6 ذیل ہر مشق میں، ماسکہ کے مختص، مکافی کا محور، ہادی خط کی مساوات اور لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کیجیے۔

1. $y^2 = 12x$
2. $x^2 = 6y$
3. $y^2 = -8x$
4. $x^2 = -16y$
5. $y^2 = 10x$
6. $x^2 = -9y$

7 تا 12 ہر ایک مشق میں مکافی کی وہ مساوات معلوم کیجیے جو دی ہوئی شرائط (conditions) کو مطمئن کرے:

7. فوکس (6,0)؛ ہادی خط $x = -6$
8. فوکس (0,-3)؛ ہادی خط $y = 3$
9. راس (0,0)؛ فوکس (3,0)
10. راس (0,0)؛ فوکس $(-2,0)$
11. راس (0,0) نقطہ (2,3) سے ہوکر گزر رہا ہے محور x-axis کے ساتھ ہے۔
12. راس (0,0) نقطہ (5,2) سے ہوکر گزر رہا ہے اور y-axis کے ساتھ متشاکل ہے۔

11.5 ناقص (Ellipse)



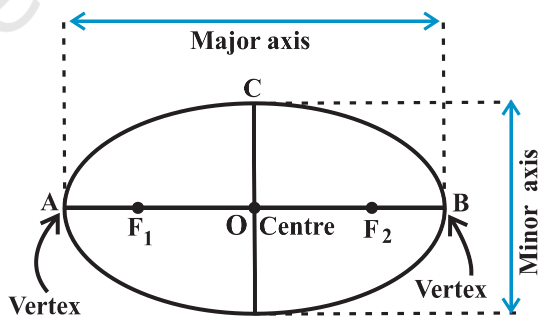
$$P_1F_1+P_1F_2=P_2F_1+P_2F_2=P_3F_1+P_3F_2$$

شکل 11.20

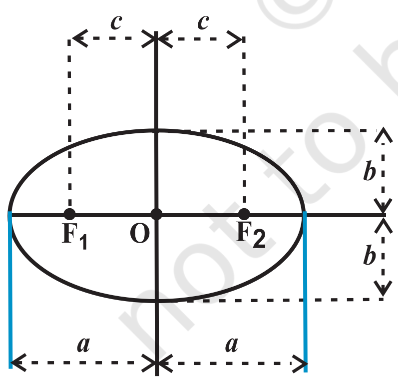
تعریف 4 ناقص مستوی میں ان تمام نقاط کا سیٹ ہے جن کے فاصلوں کا مجموعہ یا جوڑ مستوی میں دو ساکن نقاط سے ایک مستقل ہو دو مقرر نقاط کو ناقص کا ماسکہ (foci، focus کی جمع) کہا جاتا ہے۔ (شکل: 11.20)

> **نوٹ** مستقل جو ناقص پر ایک نقطے کے دو ساکن نقطوں کے فاصلوں کا جوڑ ہے ہمیشہ دو ساکن نقاط کے درمیان فاصلہ سے زیادہ ہوتا ہے۔
>
> $$P_1F_1+P_1F_2=P_2F_1+P_2F_2=P_3F_1+P_3F_2>F_1F_2$$

قطعہ خط کا درمیانی نقطہ جو ماسکہ (Foci) کو ملا رہا ہے ناقص کا مرکز (Center) کہلاتا ہے۔ ناقص کے ماسکہ سے گزرنے والا قطعہ اکبر محور (major axis) کہلاتا ہے اور قطعہ خط جو مرکز سے گزر رہا ہے اور اکبر محور پر عمود ہے اصغر محور (minor axis) کہلاتا ہے۔ اکبر محور کے آخری نقاط (end points) ناقص کے راس (Vertices) کہلاتے ہیں۔ (شکل: 11.21)



شکل 11.21



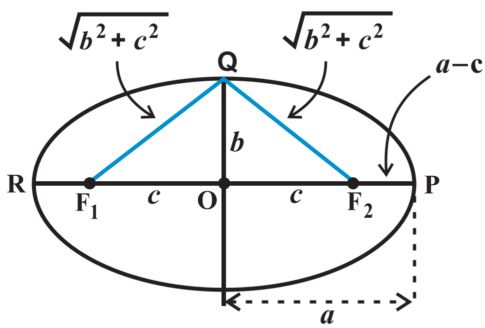
شکل 11.22

ہم اکبر محور کی لمبائی کو 2a سے ظاہر کرتے ہیں۔ اصغر محور کی لمبائی کو 2b سے اور ماسکہ (Foci) کے درمیان فاصلے کو 2c

سے۔اس طرح نصف اکبرمحور کی لمبائی a ہے اوراور نصف اصغرمحور کی لمبائی 'b' ہے (شکل:11.22)

11.5.1 نصف اکبرمحور، نصف اصغرمحور اور ناقص کے فوکس کا مرکز سے فاصلہ کے درمیان رشتہ (شکل: 11.23)

Relationship between semi-major axis, semi-minor axis and the distance of the focus from the centre of the ellipse (Fig. 11.23)



شکل 11.23

اکبرمحور (major-axis) کے سرے پرایک نقطہ P لیجئے۔

نقطہ P سے ماسکہ (Foci) کے فاصلوں کا حاصل جمع یہ ہے۔

$$F_1P+F_2P=F_1O+OP+F_2P$$

$$F_1P=F_1O+OP \quad (\text{کیونکہ})$$

$$= c+a+a-c=2a$$

اصغرمحور (minor axis) کے ایک سرے پر نقطہ Q لیجئے۔نقطہ Q سے ماسکہ (Foci) کے فاصلوں کا حاصل جمع یہ ہے۔

$$F_1Q+F_2Q=\sqrt{b^2+c^2}+\sqrt{b^2+c^2}=2\sqrt{b^2+c^2}$$

کیونکہ دونوں P اور Q ناقص پرواقع ہیں۔

ناقص (ellipse) کی تعریف سے،ہمارے پاس ہے۔

$$2\sqrt{b^2+c^2}=2a \quad e.i. \ a=\sqrt{b^2+c^2}$$

یا

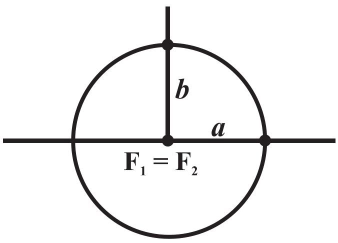
$$a^2=b^2+c^2, \quad e.i. \ c=\sqrt{a^2-b^2}$$

11.5.2 ناقص کے مخصوص حالات Special cases of an ellipse

اوپر حاصل کی گئی مساوات $c^2=a^2-b^2$ میں،اگر ہم 'a' کو مقرر رکھیں اور c کو غیر مقرر 0 تا a تک،نتیجتاً حاصل شدہ ناقصوں (ellipses) کی شکل بھی غیر مقرر ہوگی۔

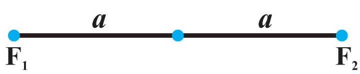
کیس (i) جب c=0،دونوں ماسکہ (Foci) ایک ساتھ مل جائیں

ناقص مبدا کے ساتھ اور $a^2 = b^2$ اس طرح $a = b$ اور اس طرح آ گے ناقص ایک دائرہ بن جائے گا۔(شکل:11.24) اس طرح دائرہ، ناقص کا ایک خاص کیس ہے جو کہ سیکشن 11.3 میں لیا گیا ہے۔



شکل 11.24

کیس (ii) جب $c = a$، تب $b = 0$ ہے۔ناقص یہ قطعہ F_1F_2 میں سکڑ جاتا ہے جس میں دونوں ماسکہ (Foci) کو ملانے پر بنتا ہے (شکل:11.25)



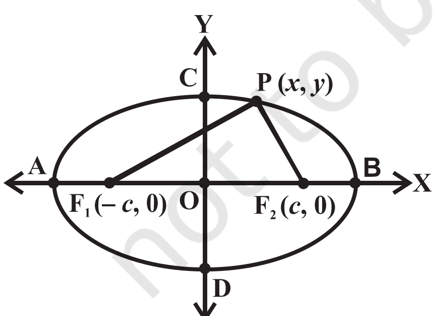
شکل 11.25

11.5.3 خروج مرکز Eccentricity

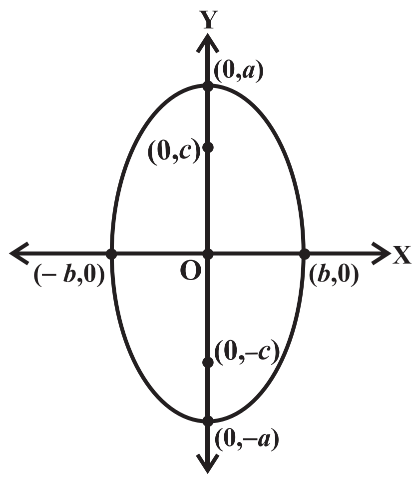
تعریف 5 ایک ناقص کا خروج مرکز (Eccentricity) ایک نسبت ہے جو ناقص کے مرکز سے ماسکہ کے فاصلہ اور مرکز سے راس کے فاصلہ کے درمیان ہوتی ہے خروج مرکز کو e سے ظاہر کیا جاتا ہے) یعنی $e = \dfrac{c}{a}$ تب کیونکہ ماسکہ (Focus) مرکز سے c فاصلے پر ہے، خروج مرکز کی زبان میں ماسکہ مرکز سے ae فاصلے پر ہے۔

11.5.4 ناقص کی معیاری مساواتیں Standard equations of an ellipse

ایک ناقص کی مساوات اس وقت سب سے آسان (سادہ) ہوگی جب ناقص کا مرکز مبدا پر ہو اور ماسکہ (Foci) x-axis اور



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

(b)

شکل 11.26(a)(b)

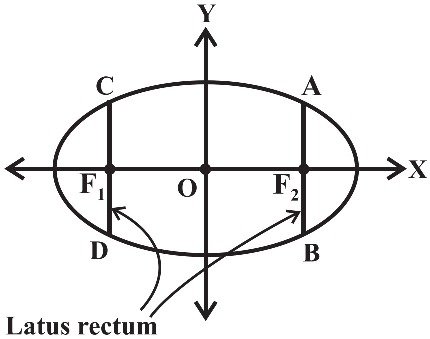
y-axis پر ہوں۔

اس طرح دو ممکن مقصدی تعین (Oreintations) شکل 11.26: میں دکھائے گئے ہیں جس میں ماسکہ x-axis پر ہے۔

مان لیجئے F_1 اور F_2 ماسکہ ہیں اور **O** قطعہ خط F_1F_2 کا درمیانی نقطہ ہے۔ مان لیجئے **O** مبدا ہے اور خط O سے F_2 سے گزرنے والا مثبت x-axis ہے اور F_1 سے گزرنے والا منفی x-axis ہے۔

مان لیجئے خط **O** سے گزرنے والا عمود x-axis پر y-axis ہے۔

مان لیجئے F_1 کے مختص $(-c, 0)$ اور F_2 کے مختص $(c, 0)$ ہیں (شکل 11.27:)



شکل 11.27

مان لیجئے ناقص پر ایک نقطہ **P** (x,y) اس طرح ہے کہ نقطہ **P** سے دو ماسکہ (Foci) تک کے فاصلوں کا حاصل جمع '$2a$' ہے تاکہ دیا ہوا ہے۔

$$F_1P+F_2P=2a \qquad \text{(1)....}$$

فاصلے کا فارمولا استعمال کرنے پر

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a$$

یعنی

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2}$$

دونوں طرف کا مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$

جو حل کرنے پر دیتا ہے۔

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a-\frac{c}{a}x$$

دوبارہ پھر مربع کرنے پر اور آسان کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

یعنی $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (کیونکہ $c^2=a^2-b^2$)

اس طرح ناقص پر کوئی بھی نقطہ مطمئن کرتا ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (1)....$$

اس کے برعکس (Coversely) مان لیجیے P(x,y) مساوات (2) کو مطمئن کرتا ہے جس میں $0<c<a$ ۔ تب

$$y^2=b^2\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)$$

اس لیے $\mathrm{PF_1}=\sqrt{(\mathrm{x+c})^2+y^2}$

$$=\sqrt{(\mathrm{x+c})^2+b^2\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)}$$

$$=\sqrt{(\mathrm{x+c})^2+(a^2-c^2)\left(\frac{a^2-x^2}{a^2}\right)} \qquad (\text{کیونکہ } \mathrm{b}^2=a^2-c^2)$$

$$=\sqrt{\left(a+\frac{c}{a}\right)^2}=a+\frac{c}{a}x$$

اسی طرح $\mathrm{PF_2}=a+\dfrac{c}{a}x$

اس لیے $\mathrm{PF_1}+\mathrm{PF_2}=a+\dfrac{c}{a}x+\mathrm{a}-\dfrac{c}{a}\mathrm{x}=2\mathrm{a}$ (3)...

اس طرح کوئی بھی نقطہ جو $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ کو مطمئن کرتا ہے، جیومیٹریائی حالات کو بھی مطمئن کرتا ہے اور اس طرح نقطہ $\mathrm{P}(x,y)$ ناقص پر واقع ہے۔

اس لیے (2) اور (3) سے ہم نے ثابت کر دیا ہے کہ ایک ناقص کی مساوات جس کا مرکز مبدا پر اور اکبر محور x-axis کے ساتھ ہے۔ یہ ہے

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

بحث ومباحثہ (Discussion) اوپر حاصل کی گئی ناقص کی مساوات یہ ملتا ہے کہ ناقص پر ہر ایک نقطہ $P(x,y)$ کے لیے، ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} = 1\frac{y^2}{b^2} \le 1, \qquad e.i.\ x^2 \le a^2, so - a < x \le a$$

اس لیے، ناقص خطوط $x = -a$ اور $x = a$ کے درمیان واقع ہے اور ان کے خطوط کو چھوتا ہے۔

اسی طرح، ناقص خطوط $x = -a$ اور $x = a$ کے درمیان واقع ہے اور ان b کو چھوتا (touch) ہے۔

اسی طرح، ہم شکل (b)11.26 میں موجود ناقص کی مساوات نکال سکتے ہیں جو یہ ہے $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ یہ دونوں مساواتیں ناقصوں (ellipses) کی معیاری (standard) مساواتیں کہلاتی ہیں۔

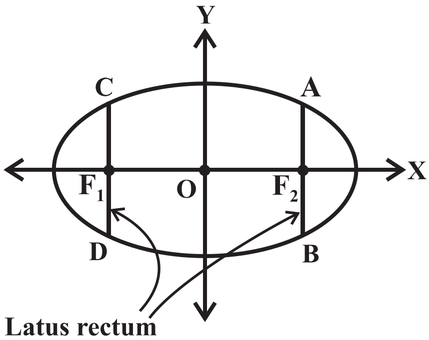
نوٹ ناقصوں کی معیاری مساواتوں کے مرکز مبدا پر ہیں اور اکبر اور اصغر محور مختص محور پر واقع ہیں حالانکہ ناقصوں کی تعلیم و جانکاری جن میں مرکز مبدا کے علاوہ کہیں اور نقطہ پر واقع ہو اور کسی بھی خط پر مرکز سے گزرتا ہوا جیسا کہ اکبر اور اصغر محور، مرکز سے ہو کر گزر رہے ہیں اور اکبر محور پر عمود ہے ہماری پڑھائی سے اس کا تعلق نہیں ہے اور ہماری پڑھائی سے باہر ہے۔

ناقص کی معیاری مساواتوں سے (شکل: 11.26)، ہمارے پاس ذیل مشاہدے (observation) ہیں:

1. ناقص دونوں مختص محور کے حوالے سے متشاکل ہے کیونکہ اگر (x,y) ناقص پر ایک نقطہ ہے، تب (-x,y) اور (x,-y) بھی ناقص پر نقاط ہیں۔
2. ماسکہ (Foci) ہمیشہ اکبر محور پر موجود ہوتا ہے۔ تشاکل کے محوروں پر مقطوعہ (Intercepts) معلوم کرنے سے اکبر محور معلوم کیا جاسکتا ہے۔ اس طرح اکبر محور X-axis کے ساتھ اکبر x^2 ضریب کا نسب نماں (denominator) بڑا ہے اور یہ Y-axis کے ساتھ اگر y^2 کا ضریب کا نسب نماں بڑا ہے۔

11.5.5 لیٹس ریکٹم Latus rectum

تعریف 6 ایک ناقص کا لیٹس ریکٹم ایک قطعہ ہے جو اکبر محور پر عمود ہے اور کسی بھی ماسکہ (Foci) کے گزرتا ہے اور جس آخری نقطے ناقص پر واقع ہیں۔



شکل 11.28

ناقص کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی دریافت کرنا

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

مان لیجیے AF_2 کی لمبائی l ہے

تب A کے مختص (c, l) ہیں یعنی (a, e, l)

کیونکہ A ناقص $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ پر واقع ہے، ہمارے پاس ہے

$$\frac{(ae)^2}{a^2}-\frac{l^2}{b^2}=1$$

$$\Rightarrow l^2=b^2(1-e^2)$$

لیکن $e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\frac{b^2}{a^2}$

اس لیے $l^2=\frac{b^4}{a^2}$, i.e., $l=\frac{b^2}{a}$

کیونکہ ناقص متشاکل ہے y-axis کے حوالے سے (حقیقت میں یہ دونوں مختص محور کے حوالے سے متشاکل ہے)،

$AF_2=F_2B$ اور اس طرح ریکٹم کی لمبائی $\frac{2b^2}{a}$ ہے۔

مثال 9 ماسکہ (Foci) کے مختص (co-ordinates) معلوم کیجیے، راس (vertices) اکبر محور کی لمبائی اصغر محور کی لمبائی، ناقص کا خروج مرکز (eccentricity) اور لیٹس ریکٹم جس کی مساوات ہے، $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$

حل کیونکہ $\frac{x^2}{25}$ کا نسب نماں $\frac{y^2}{9}$ کے نسب نماں سے بڑا ہے، اکبر محور x-axis کے ساتھ ہے۔ دی ہوئی مساوات کا $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ کے ساتھ مقابلہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$a=5$ اور $b=3$ ساتھ ہی

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{25-9}=4$$

اس لیے ماسکہ (Foci) کے مختص $(-4,0)$ اور $(4,0)$ ہیں۔ راس $(-5,0)$ اور $(5,0)$ ہیں۔ اکبر محور کی لمبائی 10 اکائیاں ہیں، اصغر

محور $2b$ کی لمبائی 6 اکائیاں اور خروج مرکز $\frac{4}{5}$ ہے اور لیٹس ریکٹم $\frac{2b^2}{a} = \frac{18}{5}$ کے برابر ہے۔

مثال 10 ناقص $9x^2 + 4y^2 = 36$ کے ماسکہ (Foci) کے مختص، راس، اکبر اور اصغر محور کی لمبائی اور خروج مرکز (eccentricity) معلوم کیجیے۔

حل ناقص کی دی ہوئی مساوات اس طرح معیاری شکل میں لکھی جاسکتی ہے۔

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

کیونکہ $\frac{y^2}{9}$ کے نسب نماں $\frac{x^2}{4}$ کے نسب نماں سے بڑا ہے، اکبر محور y-axis کے ساتھ ہے۔ دی ہوئی مساوات کا معیاری مساوات کے ساتھ مقابلہ کرنے پر

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ، ہمارے پاس ہے $b = 2$ اور $a = 3$

ساتھ ہی $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$

اور $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$

اس طرح ماسکہ $(0, \sqrt{5})$ اور $(0, -\sqrt{5})$ ہیں۔ راس $(0,3)$ اور $(0,-3)$ ہیں۔ اکبر محور کی لمبائی 6 اکائی، اصغر محور کی لمبائی 4 اکائی اور ناقص کا خروج مرکز $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ہے۔

مثال 11 ناقص کی مساوات معلوم کیجیے جس کے راس (vertices) $(\pm 13, 0)$ ہیں اور ماسکہ (Foci) $(\pm 5, 0)$ ہیں۔

حل کیونکہ راس x-axis پر ہیں۔ مساوات $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ شکل کی ہوگئی، جہاں a نصف اکبر محور ہے۔

دیا ہوا ہے $a = 13$ ، $c = \pm 5$

اس لیے مساوات $c^2 = a^2 - b^2$ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$25 = 169 - b^2, \text{ i.e., } b = 12$$

اس لیے ناقص کی مساوات $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$ ہے

مثال 12 ناقص کی مساوات معلوم کیجیے، جس کے اکبر محور کی لمبائی 20 ہے اور ماسکہ $(0, \pm 5)$ ہے۔

حل کیونکہ ماسکہ y-axis پر ہے، اکبر محور y-axis کے ساتھ ہے۔ اس لیے ناقص کی مساوات $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ہے۔

دیا ہوا ہے a = نصف اکبر محور = $\frac{20}{2} = 10$

اور رشتہ $c^2 = a^2 - b^2$ دیتا ہے

$$5^2 = 10^2 - b^2, \text{ i.e., } b^2 = 75$$

اس لیے ناقص کی مساوات ہے $\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$

مثال 13 ناقص کی مساوات معلوم کیجیے جس کا اکبر محور x-axis کے ساتھ ہے اور نقاط $(4,3)$ اور $(-1,4)$ سے ہو کر گزر رہا ہے۔

حل ناقص کی معیاری شکل $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ہے۔ کیونکہ نقاط $(4,3)$ اور $(-1,4)$ ناقص پر واقع ہیں۔ ہمارے پاس ہے

$$\frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \text{(1)...}$$

اور

$$\frac{1}{a^2} + \frac{16}{b^2} = 1 \quad \text{(2)...}$$

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوا ہے، $a^2 = \frac{247}{7}$ اور $b^2 = \frac{247}{15}$

اس طرح مطلوبہ مساوات

$$\frac{x^2}{\left(\frac{247}{7}\right)} + \frac{y^2}{\frac{247}{15}} = 1, \text{ یعنی } 7x^2 + 15y^2 = 247$$

مشق 11.3

1 تا 9 ہر ایک مشق میں، ماسکہ کے مختص معلوم کیجیے۔ راس، اکبر محور کی لمبائی، اصغر محور کی لمبائی، خروج مرکز اور ناقص کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کیجیے۔

.1 $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1$ .2 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$ .3 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$

.4 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{100}=1$ .5 $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{36}=1$ .6 $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{400}=1$

.7 $36x^2+4y^2=144$ .8 $16x^2+y^2=16$ .9 $4x^2+9y^2=36$

10 تا 20 ذیل مشقوں میں ناقص کی مساوات معلوم کیجیے جو ذیل شرائط کو مطمئن کرتے ہیں:

.10 راس $(\pm5,0)$ ، ماسکہ $(\pm4,0)$

.11 راس $(0,\pm13)$، ماسکہ $(0,\pm5)$

.12 راس $(\pm6,0)$ ، ماسکہ $(\pm4,0)$

.13 اکبر محور کے آخری سرے (Ends) $(\pm3,0)$ ، اصغر محور کے آخری سرے $(0,\pm2)$

.14 اکبر محور کے آخری سرے $(0,\pm\sqrt{5})$ ، اصغر محور کے آخری سرے $(\pm1,0)$

.15 اکبر محور کی لمبائی 26 ہے، ماسکہ $(\pm5,0)$

.16 اصغر محور کی لمبائی 16 ہے، ماسکہ $(0,\pm6)$

.17 ماسکہ $(\pm3,0)$ ، $a=4$

.18 $b=3$ ، $c=4$ ، مرکز مبدا پر ہے؛ ماسکہ x-axis پر ہے

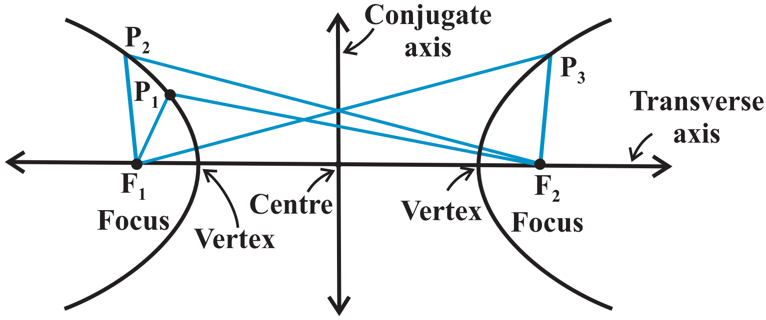
.19 مرکز (0,0) پر ہے، اکبر محور y-axis پر ہے اور نقاط (3,2) اور (1,6) سے ہو کر گزر رہا ہے۔

.20 اکبر محور x-axis پر ہے اور نقاط (4,3) اور (6,2) سے ہو کر گزر رہا ہے۔

11.6 زائد Hyperbola

تعریف 7 ایک ہائپر بولا (زائد) کسی مستوی میں تمام نقاط کا سیٹ ہے۔ جن کا مستوی میں دو ساکن نقاط کے فاصلوں کا فرق ایک مستقل ہے۔

لفظ 'فرق' جو تعریف میں استعمال کیا گیا ہے کا مطلب یہ دور والے نقطے اور قریب والے نقطے کے فاصلوں کا فرق۔ دو ساکن نقاط زائد کے ماسکے (Foci) کہلاتے ہیں۔ ماسکوں کو ملانے والا قطعہ خط کا درمیانی نقطہ زائد کا مرکز کہلاتا ہے۔ ماسکوں



$$P_1F_2 - P_1F_1 = P_2F_2 - P_2F_1 = P_3F_1 - P_3F_2$$

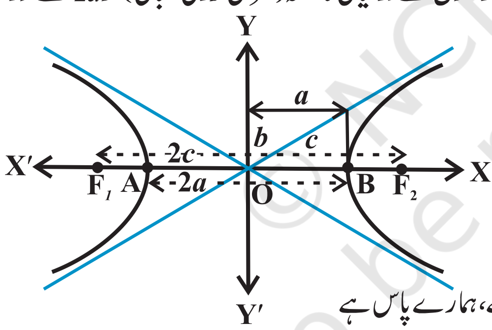
شکل 11.29

سے گزرنے والا خط عرضی محور(transverse axis) کہلاتا ہے اور مرکز سے گزرنے والا خط عرضی محور پر عمود زوجی محور (conjugate axis) کہلاتا ہے۔ وہ نقاط جن پر زائد عرضی محور کو کاٹتا ہے زائد کے راس کہلاتے ہیں۔ (شکل 11.29)

ہم دو ماسکوں کے درمیانی فاصلہ کو $2c$ سے ظاہر کرتے ہیں، دو راسوں کے درمیانی فاصلہ (عرضی محور کی لمبائی) کو $2a$ سے اور ہم مقدار b اس طرح بیان کرتے ہیں

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}$$

ساتھ $2b$ زوجی محور کی لمبائی ہے۔ (شکل 11.30)



شکل 11.30

مستقل $P_1F_2 - P_1F_1$ کو دریافت کرنا

نقطہ P کو A اور B پر لینے پر جیسا شکل 11.30 میں دکھایا گیا ہے، ہمارے پاس ہے

$$BF_1 - BF_2 = AF_2 - AF_1 \quad \text{(زائد کی تعریف سے)}$$

$$BA + AF_1 - BF_2 = AB + BF_2 - AF_1$$

یعنی
$$AF_1 = BF_2$$

تاکہ
$$BF_1 - BF_2 = BA + AF_1 - BF_2 = BA = 2a$$

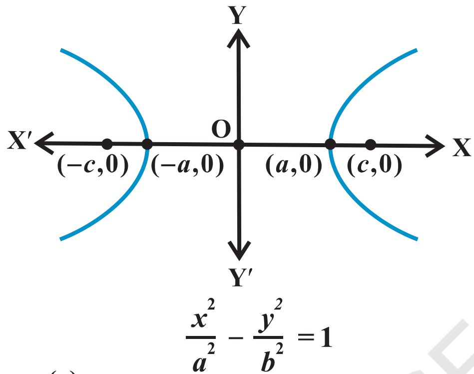
11.6.1 خروج مرکز *Eccentricity*

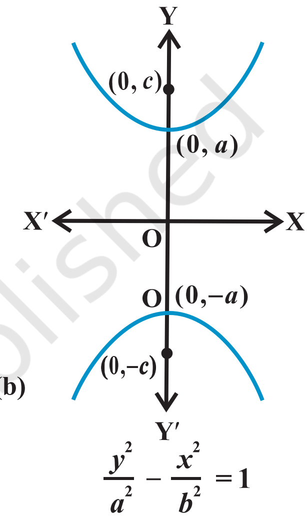
تعریف 8 ناقص کی طرح نسبت $e = \frac{c}{a}$ زائد کا خروج مرکز کہلاتا ہے۔ کیونکہ $c \geq a$ خروج مرکز کبھی بھی 1 سے کم نہیں

ہوگا۔خروج مرکز کی شکل میں ماسکہ کا مرکز سے فاصلہ ae ہوگا۔

11.6.2 زائد کی معیاری مساوات *Standard equation of Hyperbola*

زائد کی مساوات سب سے آسان ہے اگر زائد کا مرکز مبدا پر ہو اور ماسکہ x-axis اور y-axis پر ہوں۔اس طرح کے دو مقصدی تعین (orientation) شکل 11.31 میں دیے گئے ہیں۔

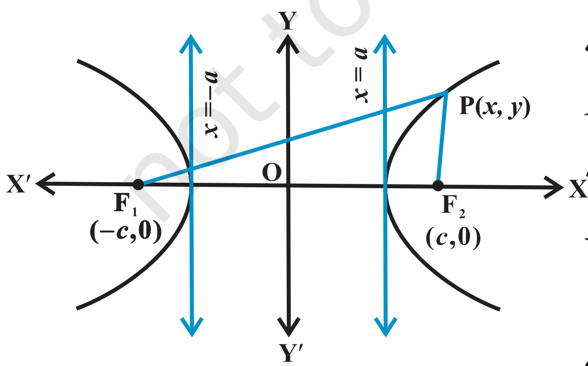




شکل 11.31

ہم زائد کی مساوات نکالیں گے جو شکل 11.31(a) میں دیا گیا ہے اور جس کا ماسکہ x-axis پر واقع ہے۔

مان لیجیے F_1 اور F_2 دو ماسکے ہیں اور قطعہ خط F_1F_2 کا 'O' درمیانی نقطہ ہے۔مان لیجیے O مبدا ہے اور خط O اور F_2 سے گزرنے والا مثبت x-axis ہے اور F_1 سے گزرنے والا منفی x-axis ہے۔خط O سے گزرنے والا جو x-axis پر عمود ہے y-axis ہے۔مان لیجیے F_1 کے مختص $(-c,0)$ ہیں اور F_2 کے مختص $(c,0)$ ہیں۔ (شکل 11.32)



شکل 11.32

مان لیجیے $P(x, y)$ زائد پر کوئی بھی نقطہ ہے

تاکہ نقطہ **P** سے سب سے دور والے نقطے اور سب سے قریب والے نقطے کے فاصلے کا فرق $2a$ ہے۔اس لیے دیا ہوا ہے

$$\mathrm{PF_1} - \mathrm{PF_2} = 2a$$

فاصلے کا فارمولا استعمال کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

یعنی
$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

دونوں طرف کا مربع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

اور آسان کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{cx}{a} - a = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

دوبارہ مربع کرنے پر اور آسان کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

یعنی
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (\text{کیونکہ } c^2 - a^2 = b^2)$$

اس طرح زائد پر کوئی بھی نقطہ مساوات $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتا ہے۔

اس کے برعکس مان لیجیے $\mathrm{P}(x, y)$ اوپر دی ہوئی مساوات کو مطمئن کرتا ہے بشرط $0 < a < c$ ۔تب

$$y^2 = b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)$$

اس لیے
$$\mathrm{PF_1} = +\sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

$$= +\sqrt{(x+c)^2 + b^2\left(\frac{x^2 - a^2}{a^2}\right)} = a + \frac{c}{a}x$$

اسی طرح
$$\mathrm{PF_2} = a - \frac{a}{c}x$$

زائد میں $c > a$؛ اور کیونکہ نقطہ **P** خط $x = a$ ، $x > a$ ، $x > a$ $\frac{c}{a}x > a$ کے دائیں طرف ہے۔اس لیے

$a - \frac{c}{a}x$ منفی ہو جاتا ہے۔اس لیے $\mathrm{PF}_2 = \frac{c}{a}x - a$

اس لیے $\mathrm{PF}_1 - \mathrm{PF}_2 = a + \frac{c}{a}x - \frac{cx}{a} + a = 2a$

ساتھ ہی نوٹ کر لیجیے اگر **P** خط $x = -a$ کے بائیں طرف ہے،تب

$$\mathrm{PF}_1 = -\left(a + \frac{c}{a}x\right),\ \mathrm{PF}_2 = a - \frac{c}{a}x$$

اس حال میں $\mathrm{PF}_2 - \mathrm{PF}_1 = 2a$ ۔اس طرح کوئی بھی نقطہ جو $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ کو مطمئن کرتا ہے زائد پر واقع ہے۔

اس لیے ہم نے زائد کی مساوات کو ثابت کر دیا ہے جس میں مبدا (0,0) اور عرضی محور x-axis کے ساتھ ہو یہ ہے

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

نوٹ ایک زائد جس میں $a = b$ ہو مساوی زائد (equilateral hyperbola) کہلاتا ہے۔

بحث ومباحثہ (Discussion)

زائد کی مساوات سے ہم نے حاصل کیا ہے، جو بتاتا ہے کہ زائد پر نقطے P(x,y) کے لیے ہمارے پاس ہے۔

$$\frac{x^2}{a^2} = a + \frac{y^2}{b^2} \geq 1$$

یعنی $\left|\frac{x}{a}\right| \geq 1,\ \ i.e.\ x \leq -a\ \ or\ \ x \geq a$ اس لیے منحنی کا کوئی بھی حصہ خطوط $x = +a$ اور $x = -a$ کے درمیان موجود نہیں ہے (اس کا مطلب حقیقت میں زوجی محور پر کوئی کاٹ نہیں)

اسی طرح، ہم شکل (b)11.31 میں موجود زائد کی مساوات نکال سکتے ہیں جو ہے $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ یہ دونوں مساوات زائدوں کی معیاری مساوات کہلاتی ہیں۔

نوٹ زائدوں کی مساواتوں میں غرضی اور زوجی محور ہوتے ہیں کیونکہ مختص محور اور مرکز ہوا پر ہوتا۔حالانکہ کچھ اس طرح

کے زائد بھی ہیں جن میں دو عمودی خطوط عرضی اور زوجی محور ہوتے ہیں، لیکن اس طرح کی تعلیم آگے جماعتوں میں آئے گی۔
زائدوں کی معیاری مساواتوں سے (شکل 11.29) ہمارے پاس ذیل مشاہدہ موجود ہیں۔

1. زائد متشاکل ہے دونوں محوروں کی مناسبت سے کیونکہ اگر (x,y) زائد پر ایک نقطہ ہے، تب (x,-y) اور (-x,-y) بھی زائد پر نقاط ہوں گے۔

2. ماسکہ ہمیشہ عرضی محور پر ہوتے ہیں۔ یہ ایک مثبت رکن ہے جس کا نسب نما عرضی محور دیتا ہے مثال کے طور پر $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ x-axis کے ساتھ عرضی محور، '6' رکھتا ہے، جب کہ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$ y-axis کے ساتھ عرضی محور رکھتا ہے جس کی لمبائی 10 ہے۔

11.6.3 لیٹس ریکٹم *Latus rectum*

تعریف 9 زائد کی لیٹس ریکٹم ایک قطعہ خط ہے جو عرضی محور پر عمود ہے کسی پر ماسکہ سے گزرتا ہوا اور جس کے آخری نقاط زائد پر واقع ہیں۔

ناقص کی طرح ہی، زائد کی لیٹس ریکٹم کی لمبائی دکھانا آسان ہے جو $\frac{25^2}{a}$ ہے

مثال 14 ذیل زائدوں کی ماسکہ اور راسوں کی مختص معلوم کیجیے، خروج مرکز، لیٹس ریکٹم کی لمبائی

(i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ (ii) $y^2-16x^2=1$

حل (i) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ مساوات کا معیاری مساوات، $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ سے موازنہ کرنے پر یہاں $a=3$،

$b=4$ اور $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a+16}=5$ ہے۔

اس لیے ماسکہ کے مختص $(\pm5,0)$ ہیں اور راس کے $(\pm3,0)$ ساتھ ہی خروج مرکز $e=\frac{e}{a}=\frac{5}{3}$۔ لیٹس ریکٹم

$$=\frac{2b^2}{a^2}=\frac{23}{3}$$

(ii) مساوات کو دونوں طرف 16 سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{1}=1$

مساوات کو معیاری مساوات $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ کے ساتھ موازنہ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$a=4$ ، $b=1$ اور $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a+16}=\sqrt{17}$

اس لیے ماسکہ کے مختص $(0,\pm\sqrt{17})$ ہیں اور راس کے $(0,\pm 4)$ ہیں۔

خروج مرکز $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{17}}{4}$ ، لیٹس ریکٹم $=\frac{2b^2}{a^2}=\frac{1}{2}$

مثال 15 زائد کی مساوات معلوم کرو جس کا ماسکہ $(0,\pm 3)$ اور راس $(0,\pm\sqrt{\frac{11}{2}})$ ہیں۔

حل کیونکہ ماسکہ y-axis پر ہے۔ زائد کی مساوات $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$ کی شکل کی ہوگی۔ کیونکہ راس $\left(0,\pm\sqrt{\frac{11}{2}}\right)$ ہیں

$a=\sqrt{\frac{11}{2}}$ ،

ساتھ، کیونکہ ماسکہ $\left(0,\pm\sqrt{3}\right)$ ، $c=3$ اور $b^2=c^2-a^2=25/4$

اس لیے، زائد کی مساوات ہے۔

$$\frac{y^2}{\left(\frac{11}{4}\right)}-\frac{x^2}{\left(\frac{25}{4}\right)}=1, \quad \text{یعنی} \quad 100y^2-44x^2=275$$

مثال 16 اس زائد کی مساوات معلوم کیجیے جہاں ماسکہ $\left(0,\pm 12\right)$ ہیں اور لیٹس ریکٹم کی لمبائی 36 ہے۔

حل کیونکہ ماسکہ $\left(0,\pm 12\right)$ ہیں۔ اس سے نکلتا ہے $c=12$

لیٹس ریکٹم کی لمبائی $=\frac{2b^2}{a}=36$ یا $b^2=18a$

اس لیے دیتا ہے $c^2=a^2+b^2$

$$144=a^2+18a$$

یعنی $a^2+18a-144=0$

منفی $a=-24, 6$ اس لیے

کیونکہ 'a' منفی نہیں ہوسکتا، ہم لیتے ہیں $a=6$ اور اس طرح $b^2=108$ اس لیے زائد کی مطلوبہ مساوات ہے۔

$$\frac{y^2}{36}-\frac{x^2}{108}=1,\ \ i.e.\ 3y^2-x^2=108$$

مشق 11.4

1 تا 6 مشقوں میں زائد کے ماسکہ اور راس کے مختص معلوم کیجیے اور زائد کے خروج مرکز اور لیٹس ریکٹم کی لمبائی معلوم کیجیے۔

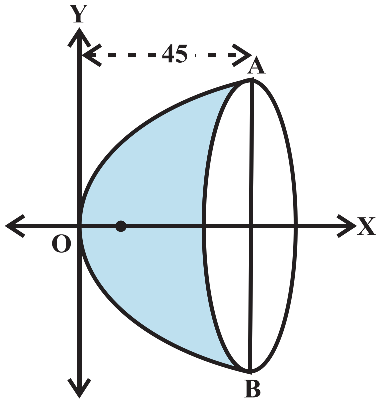
1. $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$
2. $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{27}=1$
3. $9y^2-4x^2=36$
4. $16x^2-9y^2=576$
5. $5y^2-9x^2=36$
6. $9y^2-16x^2=784$

7 تا 15 مشقوں میں زائد کی مساواتیں معلوم کیجیے جو دی ہوئی شرائط کو مطمئن کریں۔

7. راس $(\pm 2,0)$، ماسکہ $(\pm 3,0)$
8. راس $(0,\pm 5)$، ماسکہ $(0,\pm 8)$
9. راس $(0,\pm 3)$، ماسکہ $(0,\pm 5)$
10. ماسکہ $(\pm 5,0)$، عرضی محور کی لمبائی 8 ہے۔
11. ماسکہ $(\pm 5,13)$، زوجی محور کی لمبائی 24 ہے۔
12. ماسکہ $(\pm 3,\sqrt{5},0)$، لیٹس ریکٹم کی لمبائی 8 ہے۔
13. ماسکہ $(\pm 4,0)$، لیٹس ریکٹم کی لمبائی 12 ہے۔
14. ماسکہ $(\pm 7,0)$، $e=\frac{4}{3}$
15. ماسکہ $(0\pm\sqrt{10})$، (2,3) سے ہوکر گزر رہا ہے۔

متفرق مثالیں

مثال 17 ایک مکافی شکل کے آئینہ کا ماسکہ جیسا کہ شکل 11.33 میں دکھایا گیا ہے راس سے 5 سم کی دوری پر ہے۔ اگر آئینہ



شکل 11.33

45 سم گہرا ہے، فاصلہ AB دریافت کیجیے۔

حل کیونکہ ماسکہ سے راس تک کا فاصلہ 15 سم ہے۔ ہمارے پاس ہے $a = 5$ ۔اگر مبدا کو راس پر لے لیا جائے اور آئینہ کا محور مثبت x-axis کے ساتھ واقع ہو، تب مکافی حصہ کی مساوات ہے۔

$$y^2 = 4(5)x = 20x$$

یہ نوٹ کر لیجیے $x = 45$

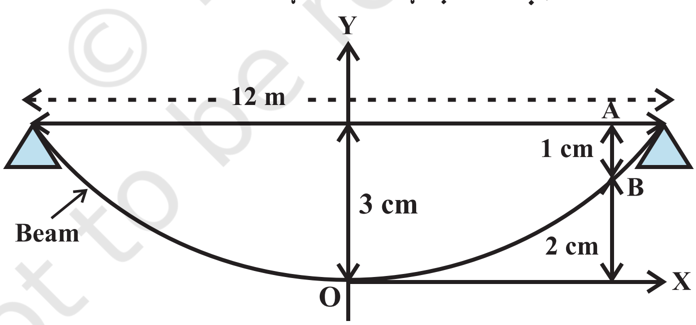
اس لیے $y^2 = 900$

اس طرح $y = \pm 30$

اس لیے $AB = 2y = 2 \times 30 = 60cm$

مثال 18 ایک شہتیر (beam) کے دوسرے پر 12 میٹر کے فاصلے سے روکا گیا ہے۔ کیونکہ وزن مرکز پر متعین ہوتا ہے اس لیے 3 سم کا جھکاؤ مرکز پر آ گیا ہے اور شہتیر کی شکل نے مکافی کی شکل اختیاری کر لی ہے۔ مرکز سے کتنی دور 1 سم کا جھکاؤ ہوگا۔

حل مان لیجیے راس سب سے نیچے کے حصے پر ہے اور محور راسی ہے۔ مان لیجیے مختص محور شکل 1134 کے طریقہ سے خیال گیا ہے۔



شکل 11.34

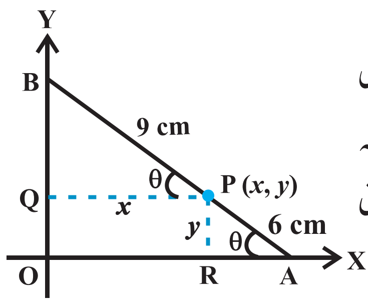
مکافی کی مساوات $x^2 = 4ay$ کی شکل کی ہوگئی، کیونکہ یہ $\left(6, \frac{3}{100}\right)$ سے ہو کر گزر رہا ہے، ہمارے پاس ہے۔

$$(6)^2 = 4a\left(\frac{3}{100}\right), \quad i.e. \quad a = \frac{36 \times 100}{12} = 300m$$

مان لیجیے شہتیر کا جھکاؤ AB ہے جو کہ $\frac{1}{100}$ حیئر ہے۔ B کے مختص ہیں $\frac{2}{100}, x$۔

اس لیے $x^2 = 4 \times 300 \times \frac{2}{100} = 24$

یعنی $x = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}\ meters$



شکل 11.35

مثال 19 ایک روڈ AB جس کی لمبائی 15 سم ہے دو مختص محور کے درمیان اس طرح رکھی ہوئی ہے کہ سرا A، x-axis پر ہے اور سرا B، y-axis پر ہے۔ ایک نقطہ P(x,y) روڈ پر اس طرح لیا گیا ہے تا کہ AP = 6 دکھایئے کہ P کا طریق (Locus) ایک ناقص ہے۔

حل مان لیجیے روڈ AB، OX کے ساتھ θ زاویہ بنا رہی ہے جیسا کہ شکل 11.36 میں دکھایا گیا ہے اور نقطہ P(x,y) اس پر واقع ہے۔

تا کہ سم $AP = 6$

کیونکہ سم $AB = 15$ ہے اس لیے ہمارے پاس ہے۔

سم $PB = 9$

نقطہ P سے y-axis اور x-axis پر بالترتیب PQ اور PR عمود کھینچیے۔

$\Delta PBQ, cos\,\theta = \frac{x}{9}$ سے $cos\,\theta = \frac{x}{9}$

$\Delta PRA, sin\,\theta = \frac{y}{6}$ سے $sin\,\theta = \frac{y}{6}$

کیونکہ $cos^2\theta + sin^2\theta = 1$

اس لیے $\left(\frac{x}{9}\right)^2 + \left(\frac{y}{6}\right)^2 = 1$

یا $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

اس طرح P کا طریق (Locus) ایک ناقص ہے۔

سبق 11 پر مبنی متفرق مشقیں

1. اگر ایک مکافی ریفلیکٹر کا قطرہ 20 سم ہے اور اسکی گہرائی 5 سم، اس کا ماسکہ معلوم کیجئے۔

2. ایک محراب مکافی شکل میں ہے اور اس کا محور راسی ہے۔ محراب کی اونچائی 10 میٹر ہے اور اس کے اساس (base) کی چوڑائی 5 میٹر ہے۔ یہ مکافی کے راسں سے '2' میٹر پر کتنا چوڑا ہوگا۔

3. ایک وزن سے لٹکے ہوئے پل کا کیبل مکافی کی شکل میں ہے۔ سڑک کا راستہ جو کہ چپٹا (horizontal) ہے اور 100 میٹر لمبا ہے کیبل سے راسی تاروں کے ذریعہ جڑا ہوا ہے، سب سے بڑے تار کی لمبائی 30 میٹر ہے اور سب سے چھوٹا 6 میٹر کا ہے۔ اس مددگار تار کی لمبائی معلوم کیجئے جو کہ راستے سے جڑا ہوا ہے اور درمیان سے 18 میٹر کے فاصلہ پر ہے۔

4. ایک محراب نصف ناقص کی شکل میں ہے۔ یہ مرکز پر 8 میٹر چوڑی اور 2 میٹر اونچی ہے۔ اس محراب کی لمبائی معلوم کیجئے جو ایک سرے سے 1.5 میٹر کی دوری پر ہے۔

5. ایک روڈ جسکی لمبائی 12 سم ہے اس طرح حرکت کر رہی ہے کہ اسکے سرے ہمیشہ مختص محور کو چھو رہے ہیں۔ اس روڈ پر ایک نقطہ P کے طریق (locus) کی مساوات معلوم کیجئے، جو کہ اس سرے سے 3 سم کی دورہ پر ہے جو کہ x-axis کے ساتھ (تعلق) ملا ہوا ہے۔

6. اس مثلث کا رقبہ معلوم کیجئے جو مکافی $x^2 = 12y$ کے راس اور اس کے لیٹس ریکٹم کے سروں کو جوڑنے سے بنتا ہے

7. ایک آدمی جو ریس کورس میں دوڑ رہا ہے یہ نوٹ کرتا ہے کہ دو فلیگ پوسٹ کے فاصلوں کا جوڑ اس سے ہمیشہ 10 میٹر ہے اور دو فلیگ پوسٹ کے درمیان فاصلہ 8 میٹر ہے اس آدمی کے ذریعہ طے کی گئی پوسٹوں کی مساوات معلوم کیجئے۔

8. ایک مساوی الضلعی مثلث ایک مکافی، $y^2 = 4ax$ کے اندر بنا ہوا ہے جہاں ایک راس مکافی کے راس پر ہے۔ مثلث کے ضلع کی لمبائی معلوم کیجئے۔

خلاصہ (Summary)

اس سبق میں ذیل تصورات اور اصول قرار دینے کے بارے میں پڑھا گیا ہے۔

- ایک دائرہ مستوی میں ان تمام نقاط کا سیٹ ہے جو مستوی میں ایک ساکن نقطے سے برابر کی دوری پر ہیں۔
- دائرہ کی مساوات جسکا مرکز (h,k) اور نصف قطر r ہے یہ ہے۔

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

- ایک مکافی مستوی میں ان تمام نقاط کا سیٹ ہے جوایک ساکن خط سے برابری کی دوری پر ہیں اور مستوی میں ایک ساکن نقطے سے۔
- اس مکافی کی مساوات جس کا ماسکہ $a70, (a, 0)$ پر ہے اور ہادی خط، $x = -a$، ہے یہ ہے
$$y^2 = 4ax$$
- مکافی کا لیٹس ریکٹم ایک قطعہ خط ہے جو مکافی کے محور پر عمود ہے، جو ماسکہ سے ہوکر گزر رہا ہے اور جس کے آخری نقطہ مکافی پر واقع ہیں۔
- مکانی $y^2\, 4ax$ کے لٹس ریکٹم کی لمبائی $4a$ ہے۔
- مستوی میں ایک ناقص ان تمام نقاط کا سیٹ ہے، جن کے دو ساکن نقاط سے فاصلوں کا جوڑ مستوی میں ایک مستقل ہے۔
- ایک ناقص کی مساواتیں جسکا ماسکہ (Focus) x-axis پر ہے، $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ہے۔
- ایک ناقص کا لیٹس ریکٹم ایک قطعہ خط ہے جو اکبر محور پر محمود ہے کسی بھی ماسکہ سے گزرتا ہے اور اس کے سرے ناقص پر ہوتے ہیں
- ناقص، $\frac{n2}{a^2}+\frac{y2}{b^2}=1$ کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی $\frac{2b2}{a}$ ہے۔
- ایک ناقص کا خروج مرکز وہ نسبت ہے جو ناقص کے مرکز اور ایک ماسکہ (Foci) کے درمیان فاصلہ اور ناقص کے ایک راس سے درمیان فاصلہ میں ہوتی ہے۔
- زائد مستوی میں ان تمام نقاط کا سیٹ ہے، جن کے اسی مستوی میں دو ساکن مقطوں کے فاصلوں کا فرق ایک مستقل ہوتا ہے۔
- اس زائد کی مساوات جسکا ماسکہ x– محور پر ہے: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

- زائد کی لیٹس ریکٹم ایک قطع خط ہے جو عرضی محور عمود ہے کسی بھی ماسکہ (Foci) سے گزرتی ہوئی اور جسکے آخری نقاط زائد پر واقع ہوں۔
- زائد: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ کے لیٹس ریکٹم کی لمبائی $\frac{2b^2}{a}$ ہے۔
- زائد کی خروج مرکز وہ نسبت ہے جو زائد کے مرکز سے فاصلوں اور ایک ماسکہ (Foci) اور زائد کے ایک راس کے درمیان ہے۔

تاریخ کے اوراق سے Historical Note

جیومیٹری ریاضی کی سب سے قدیم شاخوں میں سے ہے۔ یونانی جیومیٹری دانوں نے اکثر منحنیوں (Curves) کے خواص معلوم کئے جو نظریاتی اور عملی اہمیت کے حامل ہیں۔ تقریباً 300B.C میں اقلیدس (EUCLID) نے جیومیٹری پر ایک مقالہ لکھا۔ وہ پہلا شخص تھا جس جیومیٹریائی شکلوں کو ترتیب دیا جنکا انحصار چند بدیہات (Axioms) پر تھا جنہیں جسمانی ترجیحات کی وجہ سے تجویز کیا گیا تھا۔ جیومیٹری ابتدا ہی سے ہندوستانیوں اور یونانیوں کے زیر مطالعہ رہی ہے مگر انہوں نے خاص طور سے الجبرا کا استعمال نہیں کیا۔ اس مضمون کو ترکیبی رسائی اقلیدس اور سلبا سوترا وغیرہ نے بخشی اور یہ سلسلہ 1300 سال

تک جاری رہا۔ 200B.C میں (Appolonius) نے The Conic نام کی ایک کتاب لکھی جو تمام مخروطی تراشوں (Conic section) کے بارے میں تھی جس میں بہت اہم ایجادات تھیں جس سے صدیوں تک سبقت حاصل نہ ہوسکی۔

جدید تجزیاتی جیومیٹری (Analytic Geometry) رین ڈی کارتیز (A.D 1596-1660 (Rene Descartes کے نام پر کارتیزی جیومیٹری کہلاتی ہے۔ جس کی ایک Ralevant Book 1637 میں شائع ہوئی جس کا نام La Geometric تھا۔ مگر بنیادی اصول اور تجزیاتی ضوابط پہلے ہی پیری ڈی فرمٹ (1601-1665 (Pierre De Fermat نے دریافت کر لئے تھے مگر بدقسمتی سے اس مضمون پر اس کا مقالہ جو مستوی اور جامد لوکائی کے تعارف کے نام سے تھا اس کی موت کے بعد 1679 میں شائع ہوا۔ اس لئے ڈی کارتیز ہی تنہا تجزیاتی جیومیٹری کے موجد تسلیم کئے گئے۔

Isaaq Barrow کارتیزی ضوابط کے استعمال کو نظر انداز کرتے رہے مگر نیوٹن نے منحنیوں کی مساوات معلوم

کرنے کے لئے (Method of undetermined coefficents) کا طریقہ استعمال کیا۔اس نے کئی طرح کے مختص (Coordinates) استعمال کئے جن میں Polar اور Bipolar شامل ہیں۔ Leibnitz نے 'abscissa' "Ordinlae" اور "Co-ordinale" اصطلاحات کا استعمال کیا L'Hospital نے تقریباً 1700 میں تجزیاتی جیومیٹری پر ایک اہم Text Book لکھی۔

Clairaut نے سب سے پہلے 1729 میں Distance Formula پیش کیا حالانکہ یہ بہت دھندلی شکل میں تھا۔اس نے خط کی Intercept Form بھی پیش کی Cramer نے 1750 میں رسمی طور پر مختص محاور کا استعمال کیا اور دائرے کی مساوات اس طرح پیش کی $(y-a)^2+(b-x)^2=r^2$ اس نے اپنے دور میں تجزیاتی جیومیٹری کی بہترین تشریح پیش کی۔ Monge نے 1781 میں خط کی مساوات جدید نقطہ سلوپ کی شکل میں اس طرح دی $y-y=a(x-x')$ دوخطوط کی عمودیت (Perpendicularity) کی شرط اس طرح دی $aa'+1=0$۔

S.F.Lacriox (1765-1843A.D.) نے بہت سی کتابیں لکھیں لیکن تجزیاتی جیومیٹری میں اس کا کام بہت منتشر حالات میں پایا گیا۔اس نے خط کی دونقطوں والی مساوات اس طرح دی، $y-\beta=\dfrac{\beta'-\beta}{\propto'-\propto}(x-\propto)$ اور نقطہ $(\propto,\beta)$ سے خط $y=ax+b$ کا عمودی فاصلہ اس طرح دیا $\dfrac{\beta-ax-b}{\sqrt{1+a^2}}$

دوخطوط کے درمیان زاویہ اس طرح دیا $\dfrac{\beta-ax-b}{\sqrt{1+a^2}}$ یہ بات قابل حیرت ہے کہ تجزیاتی جیومیٹری کی ایجاد کے 150 سال کے انتظار کے بعد اتنے اہم نتائج حاصل ہوئے۔ C.Lame نام کے ایک سول انجینیر نے 1818 میں دو لوسائی (Loci) E=o اور E'=o کے تقاطع سے گذرنے والی منحنی (curve) کی مساوات mE+m'E=o دی۔

ریاضی اور سائنس میں بہت سی اہم ایجادات مخروطی تراشوں سے منسلک ہوتی رہی ہیں۔یونانی ریاضی داں ارشمیدش خصوصاً اوراپولونیس نے مخروطی تراشوں کا ان کے حسن کی وجہ سے مطالعہ کیا۔یہ منحنیاں بیرونی خلاء کی تحقیق اور جوہری اجزاء کی کھوج لئے بہت اہم اوزار ہیں۔