باب 10

سیدھے خطوط
(STRAIGHT LINES)

❖ جیومیٹری ، ایک منطقی نظام کی طرح ایک ذریعہ ہے اوریہاں تک کہ یہ سب سے زیادہ طاقت ور ذریعہ ہے جو بچوں کو انسانی جوش کی طاقت کا اندازہ کرانے کے لیے کہ یہ ان کااپنا ہی جوش ہے- **H. FREUDENTHAL** ❖

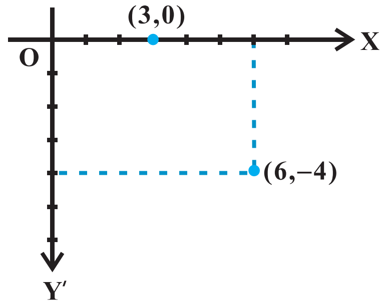
10.1 تعارف (Introduction)

رینے ڈیسکارٹس
(1596-1650)

ہم اپنی پچھلی جماعتوں سے دوابعادی مختص جیومیٹری سے پہلے ہی سے واقف ہیں۔ خاص طور پر یہ الجبرا جیومیٹری کا اجتماع ہے۔ الجبرا کا استعمال کر کے جیومیٹر کی منظّم تعلیم سب سے پہلے فرانس کے فلاسفر اور ریاضی داں رینے ڈیسکارٹیز (Rene Descartes) نے اپنی کتاب لا جیومیٹری (La Geometry) میں کی ہے جو 1637ء میں شائع ہوئی تھی۔ اس کتاب نے منحنی کی مساوات کا تعارف علامت سے کرایا اور جیومیٹری کی تعلیم میں تجزیاتی طریقوں سے رشتہ قائم کرایا۔ تجزیہ اور جیومیٹری کے نتیجتاً اجتماع کو آج تجزیاتی جیومیٹری کہا جاتا ہے۔ پچھلی جماعتوں میں ہم نے مختص (Co-ordinate) جیومیٹری پڑھی ہے، جہاں ہم نے مختص محاور، مختص مستوی نقاط کو مستوی میں دکھانا دونقطوں کے درمیان فاصلہ، تراش فارمولہ (Section formula) وغیرہ کے بارے میں پڑھا ہے۔

ہم پچھلی جماعتوں میں پڑھی گئی مختص جیومیٹری کے بارے میں ذرا دھیان دیتے ہیں اور تھوڑا سوچتے ہیں۔ اعادہ کرنے پر نقاط (6,-4) اور (3,0) کی جگہ xy مستوی میں شکل 10.1 میں دکھائی گئی ہے۔

ہم یہ نوٹ کر سکتے ہیں کہ نقطہ (6,-4) Y-axis سے '6' اکائی فاصلے پر ہے جب اسے X-axis کی +ve طرف ناپا جاتا



شکل 10.1

ہے اور X-axis سے '4' اکائی فاصلے پر ہے جب اسے Y-axis کی -ve طرف ناپا جاتا ہے۔ اسی طرح نقطہ (3,0) Y-axis سے '3' اکائی فاصلے پر ہے جب اسے X-axis کے +ve طرف ناپا جائے اور X-axis سے 'O' فاصلے پر ہے۔

وہاں ہم نے درج ذیل خاص فارمولوں کو بھی پڑھا ہے:

I. نقاط) $PP(X_1,y_1)$ اور $Q(X_2,y_2)$ کے درمیان فاصلہ

$$Q=\sqrt{(X_2\text{-}x_1)^2+(y_2\text{-}y_1)^2}$$

مثال کے طور پر، نقاط (6,-4) اور (3,0) کے درمیان فاصلہ

$$PQ=\sqrt{(3\text{-}6)^2+(0+4)^2}=\sqrt{9+16}=5\text{Units}$$ (اکائیاں)

II. اس نقطے کے مختص جو اس قلع خط کو اندرونی کاٹتا ہے جو نقاط (X_1,y_1) اور (X_2,y_2) سے مل کر بنا ہے اور جن کی نسبت m:n

$$\left[\frac{mx_2+nx_1}{m+n},\frac{my_2+ny_1}{m+n}\right]$$ ہیں

مثال کے طور پر اس نقطے کے مختص اس قطعہ کو اندرونی کاٹتا ہے جو نقاط A(1,-3) اور B(-3,9) سے مل کر بنی ہے جس کی نسبت 3:1 ہے، یہ ہیں۔

$$x=\frac{1.((-3)+3.1}{1+3}=0 \text{ اور } y=\frac{1.9+3.(-3)}{1+3}=0$$

III. خاص طور پر اگر m=n ہو تو اس قطعہ خط کا درمیانی نطقہ جو نقاط (X_1,y_1) اور (X_2,y_2) سے مل کر بنا ہے یہ ہیں۔

$$\left[\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right]$$

IV. اس مثلث کا رقبہ جس کے راس (X_1,y_1)، (X_2,y_2) اور (X_3,y_3) ہیں یہ ہیں۔

$$\frac{1}{2}\left(x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)\right)$$

مثال کے طور پر اس مثلث کا رقبہ جس کے راس (4,4)، (3,-2) اور (-3-16) ہیں، یہ ہیں۔

$$\frac{1}{2}\left|4(-2-16)+3(16-4)+(-3)(4+2)\right|=\frac{|-56|}{2}=27$$

ریمارک اگر ایک مثلث ABC کا رقبہ 'صفر' ہے، تب تینوں نقاط A، B اور C ایک ہی خط پر واقع ہوتے ہیں۔ یعنی یہ خط نقطے

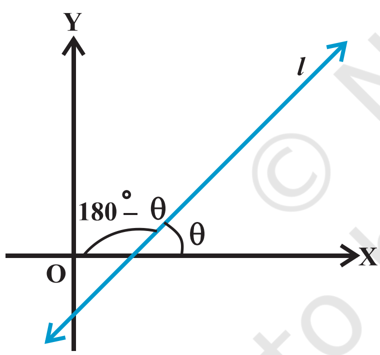
کہلاتے ہیں۔

ہم اس موجودہ سبق میں مختص جیومیٹری کی پڑھائی کو اور آگے بڑھائیں گے تاکہ سب سے آسان ترین جیومیٹری کی شکل کی خاصیتوں کا مطالعہ کیا جاسکے — سیدھی لائین یا سیدھا خط۔ اس کی سادگی کے برعکس خط، جیومیٹری میں ایک بہت اہم تصور ہے اور ہماری روزمرہ کی زندگی میں بہت سے تجربوں اور مختلف دلچسپ طریقوں میں بیش قیمتی طور پر استعمال ہوتا ہے، ہمارا خاص دھیان ہے کہ خط کو الجبری طور پر پیش کرنا، جس کے لیے اس کا سلوپ (Slope) سب سے زیادہ اہمیت کا حامل ہے۔

10.2 ایک خط کا سلوپ (ڈھال) (Slope of a Line)

ایک خط مختص مستوی میں x-axis کے ساتھ دو زاویے بناتی ہے۔ جو تکمیلی (Supplementary) ہوتے ہیں۔ زاویہ (مان لیا θ) خط l سے x-axis کی مثبت سمت میں اور گھڑی کی سمت سے الٹا ناپا گیا، خط کا جھکاؤ کہلاتا ہے۔ صاف طور پر $0^0 \le \theta \le 180^0$ (شکل 10.2)

ہم دیکھتے ہیں کہ x-axis کے متوازی خطوط، یا x-axis سے ملتے ہوئے خطوط، 0^0 کا جھکاؤ رکھتے ہیں۔ ایک راسی خط کا جھکاؤ (y-axis کے متوازی یا ملتا ہے) 90^0 ہوتا ہے۔



شکل 10.2

تعریف 1 اگر خط l کا چڑھاؤ θ ہے تو $\tan\theta$ خط l کا ڈھال (Slope) یا تعمیم شدہ ڈھال (gradient) کہلاتا ہے۔

ایک لائین کا سلوپ جس کا چڑھاؤ 90^0 ہے بیان نہیں کیا گیا ہے۔

لائین (خط) کا سلوپ m سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

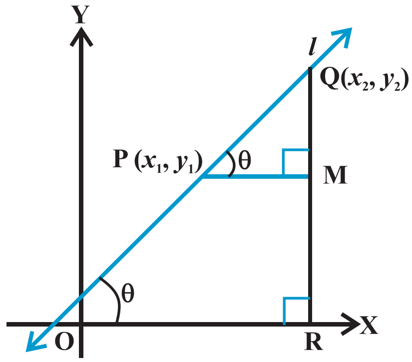
اس لیے $m = \tan\theta, \theta \neq 90^0$

اس پر غور کیا جاسکتا ہے کہ x-axis کا سلوپ '0' ہے اور y-axis کا بیان نہیں کیا گیا ہے۔

10.2.1 ایک خط کا سلوپ جب کہ خط پر کہیں دو نقطوں کے مختص دیئے گئے ہوں (Slope of a line when coordinates of any two points on the line are given)

ہم جانتے ہیں کہ ہم ایک خط کو اس وقت مکمل دکھا سکتے ہیں جب ہمیں اس پر دو نقطے دیئے گئے ہوں۔ اس لیے ہم ایک خط کا سلوپ نکالنے

کے لیے آگے بڑھتے ہیں دو نقطوں کے مختص کے ارکان کے طور پر۔



شکل 10.3(i)

مان لیجئے $P(x_1, y_1)$ اور $Q(x_2, y_2)$ دو نقطے ایک غیر راسی خط l پر ہیں جس کا چڑھاؤ θ ہے۔ صاف طور پر $x_1 \neq x_2$، ورنہ x-axis پر عمود ہو جائے گا اور پھر اس کا سلوپ بھی define نہیں کیا جا سکے گا۔ خط l کا چڑھاؤ حادۃ (acute) یا منفرجہ (obtuse) ہوگا۔ ہمیں یہ دو حالتیں (کیس) لینے چاہئے۔ جس طرح شکل 10.3(a) اور 10.3(b) میں دکھایا گیا ہے عمود QR، x-aixs پر PM عمود پر کھینچئے۔

کیس 1 جب θ زاویہ حادہ ہو:

شکل 10.3(i) میں، $\angle MPQ = \theta$

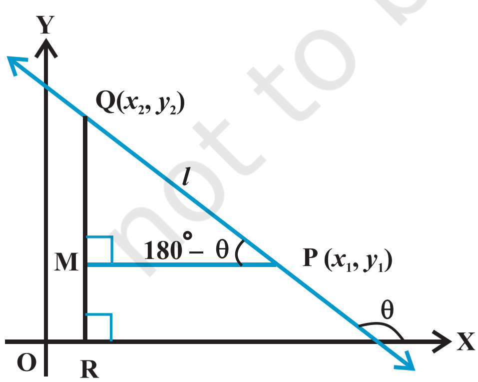
اس لیے خط l کا سلوپ $= m = \tan\theta$ (1)....

لیکن ΔMPQ میں ہمارے پاس ہے۔ $\tan\theta = \dfrac{MQ}{MP} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ (2)....

مساوات (1) اور (2) سے ہمارے پاس ہے۔

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

کیس II جب کہ θ زاویہ منفرجہ ہے۔



شکل 10.(ii)

شکل 10.3(ii) میں ہمارے پاس ہے۔

$$\angle MPQ = 180^0 - \theta$$

اس لیے $\theta = 180^0 - \angle MPQ$

اب خط l کا سلوپ:

$$m = \tan\theta$$

$$= \tan(180^0 - \angle MPQ)$$

$$= -\tan \angle MPQ$$

$$= -\frac{MP}{MQ} = -\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

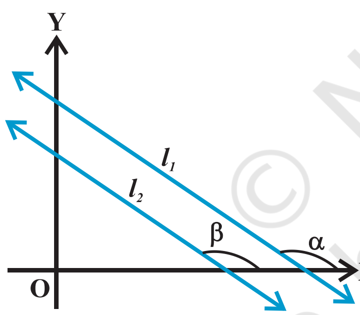
اسی طرح ہم نے (Consequently) دیکھا کہ دونوں کیسوں میں خط 1 کا سلوپ دونوں نقطوں $(x_1\text{-}y_1)$ اور (x_2-y_2)

کے ذریعے دیا گیا ہے $m = \frac{y_2\text{-}y_1}{x_2\text{-}x_1}$ سے۔

10.2.2 خطوط کے متوازی ہونے اور عمودی ہونے کی شرط ان کے سلوپ (ڈھال) کی شکل میں

Conditions for parallelism and perpendicularity of lines in terms of their slopes

ایک مختص مستوی میں، مان لیجئے کہ غیر راسی خطوط l_1 اور l_2 کے سلوپ بالترتیب m_1 اور m_2 ہیں۔ مان لیجئے ان کے ڈھلاؤ بالترتیب a اور b ہیں۔



شکل 10.4

اگر خط l_1 خط l_2 کے متوازی ہے، (شکل: 10.4) تب ان کے ڈھلاؤ بھی برابر ہوں گے۔

a=B اور اس طرح $\tan a = \tan B$

اس لیے $m_1 = m_2$، یعنی ان کے سلوپ بھی برابر ہیں۔

اس کے برعکس، اگر دو خطوط l_1 اور l_2 کے سلوپ برابر ہیں۔

$i.e., m_2 = m_2$

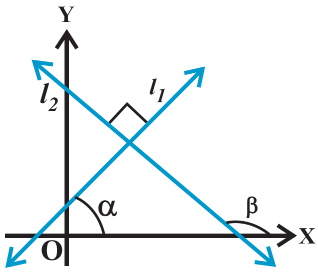
تب $\tan a = \tan B$

tan فنکشن کی خاصیت سے (0^0 اور 180^0 کے درمیان)

اس لیے، خطوط متوازی ہیں۔ اس طرح، غیر عمودی خطوط l_1 اور l_2 متوازی ہیں

اگر صرف اور صرف ان کے سلوپ بھی برابر ہیں۔ اگر خطوط l_1 اور l_2 عمودی ہیں (شکل: 10.5) تب $B–a+90^0$

اس لیے $\tan B = \tan(a+90^0)$



شکل 10.5

$$=-\cot a=-\frac{1}{\tan a}$$

$$ie.\quad m_2=-\frac{1}{m1} or\ m_1\ m_2=-1$$

اس کے برعکس اگر $m_1\ m_2=-1$

$$ie.\quad \tan a \tan B=-1$$

ہم درجہ ذیل مثالوں پر غور کرتے ہیں:

مثال 1 ان خطوط کا سلوپ معلوم کیجئے:

(a) جو نقاط (3,-2) اور (-1,4) سے گزر رہے ہیں۔

(b) جو نقاط (3,-2) اور (7,-2) سے گزر رہے ہیں۔

(c) جو نقاط (3,-2) اور (3,4) سے گزر رہے ہیں۔

(d) x-axis کی مثبت سمت کے 60^0 کا ڈھال بنا رہے ہیں۔

حل (a) نقاط (3,-2) اور (-1,4) کو ملانے والے خط کا سلوپ

$$m=\frac{4-(-2)}{-1-3}=\frac{6}{-4}=\frac{-3}{2}$$

(b) نقاط (3,-2) اور (7,-2) کو ملانے والے خط کا سلوپ

$$m=\frac{-2-(-2)}{7-3}=\frac{0}{4}=0$$

(c) نقاط (3,-2) اور (3,4) کو ملانے والے خط کا سلوپ

$$m=\frac{4-(-2)}{-3-3}=\frac{6}{0}$$ جو کہ define نہیں ہے

(d) یہاں خط کا ڈھال $a=60^0$ ہے، اس لیے خط سلوپ ہے۔

$$m=\tan 60^0=\sqrt{3}$$

10.2.3 دو خطوط کے درمیان زاویہ *Angle between two lines*

جب ہم ایک مستوی میں ایک سے زیادہ خط کے بارے میں سوچتے ہیں تو ہم دیکھتے ہیں کہ یا تو یہ آپس میں کاٹتے رہی ہیں یا ایک دوسرے کے متوازی ہیں۔

یہاں ہم دو خطوط کے درمیان زاویہ پر بات چیت کریں گے ان کے سلوپ کی شکل میں۔

مان لیجئے L_1 اور L_2 دو غیر راسی خطوط ہیں جن کے سلوپ بالترتیب m_1 اور m_2 ہیں۔ اگر a_1 اور a_2 بالترتیب L_1 اور L_2 کے ڈھلاؤ ہیں، تب

$m_1 = \tan a_1$ اور $m_2 = \tan a_2$

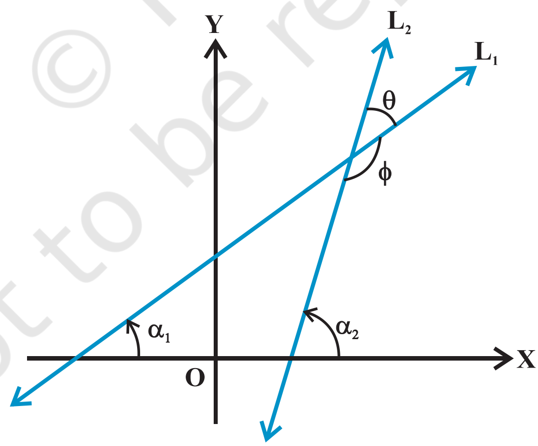
ہم جانتے ہیں کہ جب دو خطوط ایک دوسرے کو کاٹتے ہیں تو وہ متقابل راسی زاویوں (Vertically opposite angles) کے دو جوڑے بناتے ہیں تا کہ دو متصل زاویوں (adjacent angles) کا جوڑ 180^0 ہو جائے۔ مان لیجئے L_1 اور L_2 کے درمیان θ اور ∅ متصل زاویے ہیں شکل (10.6:) تب

$\theta = a_2 - a_1$ اور $a_1, a_2 \neq 90^0$

اس لیے $$\tan\theta = \tan(a_2 - a_1) = \frac{\tan a_2 - \tan a_1}{1 + \tan a_1 \tan a_2} = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2} \,(\text{as } 1 + m_1 m_2 \neq 0)$$

$$\text{and } \varnothing = 180^0 = \theta$$

$$or\ \tan\varnothing = \tan(180^0 - \theta) = -\tan\theta = \left(-\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right), \text{as } 1 + m_1 m_2 \neq 0$$



شکل 10.6

اب دو Cases پیدا ہوتے ہیں۔

کیس I اگر $\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$ مثبت ہے، تب $\tan\theta$ بھی مثبت ہوگا اور $\tan\varnothing$ منفی ہوگا جس کا مطلب ہے θ حادہ ہوگا

$\varnothing$ منفرجہ ہوگا۔

کیس II اگر $\frac{m_2 - m_1}{1+ m_1m_2}$ منفی ہے، تب $\tan\theta$ بھی منفی ہوگا اور $\tan\varnothing$ مثبت ہوگا جس کا مطلب ہے θ منفرجہ ہوگا اور $\varnothing$ حادّہ ہوگا۔

اس طرح، زاویہ حادّہ (مان لیا θ) خطوط L_1 اور L_2 کے درمیان جن کے سلوپ بالترتیب m_1 اور m_2 ذریعہ دیئے گئے ہیں،

اس کے $\tan\theta=\left|\frac{m_2 - m_1}{1+ m_1m_2}\right|, as\ 1+m_1m_2 \neq 0$ ...(1)

منفرجہ زاویہ (ϕ مانا) $\phi = 180^\circ - \theta$ کو استعمال کرکے معلوم کیا جاسکتا ہے۔

مثال 2 اگر دو خطوط کے درمیان زاویہ $\frac{\pi}{4}$ ہے اور خطوط میں سے کسی ایک کا سلوپ $\frac{1}{2}$ ہے تو دوسرے خط کا سلوپ معلوم کیجئے۔

حل ہم جانتے ہیں کہ دو خطوط جنکے سلوپ بالترتیب m_1 اور m_2 ہیں ان کے درمیان زاویہ حادہ θ اس طرح ہوتا ہے۔

$$\tan\theta=\left|\frac{m_2 - m_1}{1+ m_1m_2}\right| \quad ....1$$

مان لیجئے $m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = m$ اور $\theta=\frac{\pi}{4}$ ہے۔

اب ان قدروں کو (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\pi}{4}=\left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right| \text{ or } 1=\left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}\right|$$

جو دیتا ہے

$$\left|\frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}+1\right| \text{ or } \frac{m-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}m}=-1$$

اس لیے $m = 3 \text{ or } m = -\frac{1}{3}$

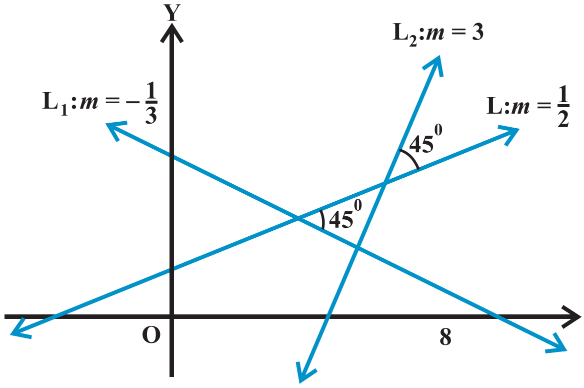
اس لیے دوسرے خط کا سلوپ 3 یا $\frac{1}{3}$ ہے۔ 10.7 میں دی گئی شکل ان دو جوابات کی وجہ کی وضاحت کرتی ہے۔

مثال 3 (-2,6) اور (4,8) نقاط سے گزرنے والا خط (8,12) اور (x,24) نقاط سے گزرنے والے خط پر عمود ہے۔ x کی قدر

معلوم کیجئے۔

حل (-2,6) اور (4,8) نقاط سے گزرنے والے خط کا سلوپ ہے۔

$$m_1 = \frac{8-6}{4-(-2)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



شکل 10.7

نقاط (8,12) اور (x,24) نقاط سے گزرنے والے خط کا سلوپ ہے۔

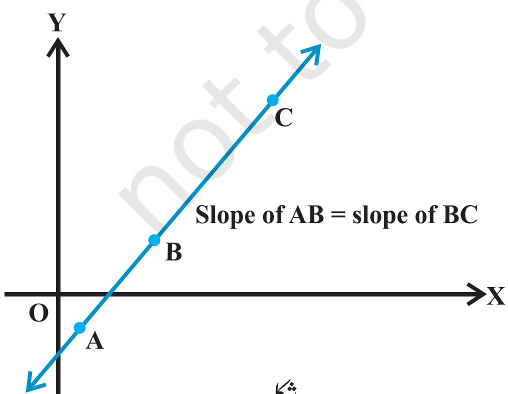
$$m_2 = \frac{24-12}{x-8} = \frac{12}{x-8}$$

چونکہ دونوں خطوط ایک دوسرے پر عمود ہیں۔اس لیے $m_1m_2 = -1$ جو دیتا ہے۔

$$\frac{1}{3} \times \frac{12}{x-8} = -1 \text{ or } nx4$$

10.2.4 تین نقاط کا ہم خط ہونا (Collinearity of three points)

ہم جانتے ہیں کہ دو متوازی خطوط کا سلوپ برابر ہوتا ہے۔اگر دو خطوط جن کے سلوپ یکساں ہیں ایک مشترک نقطہ سے گزر رہے ہیں۔تب دونوں خطوط متفق ہو جائیں گے۔اس طرح ایک مستوی xy میں تین نقطے A، B اور C ہیں۔تب وہ ایک ہی خط پر واقع ہوں گے اس کا مطلب تینوں نقطے ہم خط ہیں (شکل 10.8)



شکل 10.8

مثال 4 تین نقطے P (h, k)، $Q(x_1,y_1)$ اور $R(x_2,y_2)$ ایک خط پر موجود ہیں۔دکھائیے کہ

$$(h-x_1)(y_2-y_2)=(k-y_1)(x2-x)$$

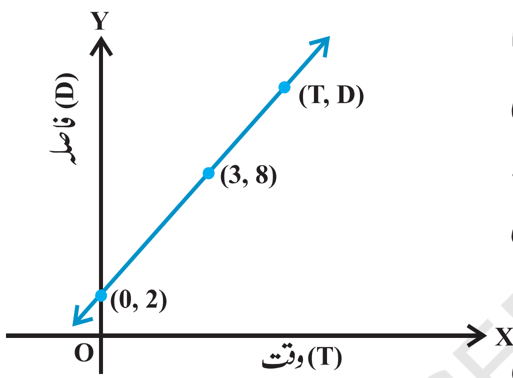
حل کیونکہ تینوں نقطے P، Q اور R ہم خط نقاط ہیں، ہمارے پاس ہے۔

PQ کا سلوپ = QR کا سلوپ

$$i.e., \frac{y_1 - k}{x_1 - h} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

یا
$$\frac{k - y_1}{h - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

یا
$$(h\text{-}x_1)(y_2\text{-}y_2)\text{=}(k\text{-}y_1)(x_2\text{-}x_1)$$



شکل 10.9

مثال 5 شکل 10.9 میں، ایک خطی حرکت کا وقت اور فاصلہ کا گراف دیا گیا ہے۔ وقت اور فاصلہ کی دو حالتیں ریکارڈ کی گئی ہیں جب کہ T=0، D=2 اور T=3، D=8 ہو۔ سلوپ کے تصور کا استعمال کرتے ہوئے، حرکت کا قانون معلوم کیجیے اس کا مطلب یہ ہے کہ فاصلہ کس طرح وقت پر انحصار کرتا ہے۔

حل مان لیجیے (T , D) خط پر کوئی بھی نقطہ ہے، جہاں D فاصلہ کو ظاہر کرتا ہے T وقت پر اس لیے نقطے (0,2)، (3,8) اور (T,D) ہم خط نقطے ہیں۔ تا کہ

$$\frac{8-2}{3-0} = \frac{D-8}{T-3} \quad \text{or} \quad 6(T-3) = 3(D-8)$$

$$\text{or} \quad D=2(T+1)$$

جو مطلوبہ رشتہ ہے۔

مشق 10.1

.1 کارتیزی مستوی میں ایک چار ضلعی بنائیے، جس کے راس (-4,5)، (0,7)، (5,-5) اور (-4,-2) ہیں۔ ساتھ ہی اس کا رقبہ بھی معلوم کیجیے۔

.2 ایک مساوی ضلع مثلث (Equilateral Tringle) جس کا اساس base $2a$ ضلع کے ساتھ y-axis کے ساتھ واقع ہے تا کہ اساس کا درمیانی نقطہ مبدء پر ہو۔ مثلث کے راس معلوم کیجیے۔

3. $P(x_1,y_1)$ اور $Q(x_2,y_2)$ کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے جب کہ (i) **PQ**، y-axis کے متوازی ہو، (ii) **PQ**، x-axis کے متوازی ہو۔

4. x-axis پر ایک نقطہ معلوم کیجئے، جو کہ (7,6) اور (3,4) سے برابر کے فاصلہ پر ہو۔

5. ایک خط کا سلوپ معلوم کیجئے جو مبدا سے گزر رہا ہو، اور قطعہ خط کا درمیانی نقطہ جو نقاط **P**(0.-4) اور **B**(8,0) کے مل نے سے بنا ہو۔

6. بغیر فیثا غورث کے مسئلہ (Pythagoran theorem) کا استعمال کئے ہوئے، دکھائیے کہ نقاط (4,4)، (3,5) اور (-1,1) ایک قائم زاوی مثلث کے راس ہیں۔

7. اس خط کا سلوپ معلوم کیجئے جو y-axis کی مثبت سمت کے ساتھ 30^0 کا زاویہ بناتی ہے اور جو کہ anticlock wise میں ماپا جاتا ہے۔

8. x کی وہ قدر معلوم کیجئے جس کے لیے نقاط (x,1)، (2,1) اور (4,5) ہم خط نقطہ ہیں۔

9. بغیر فاصلے کے فارمولے کا استعمال کئے ہوئے دکھائیے کہ نقاط (-2,-1)، (4,0)، (3,3) اور (-3,2) ایک متوازی الاضلاع (Parallelogram) کے راس ہیں۔

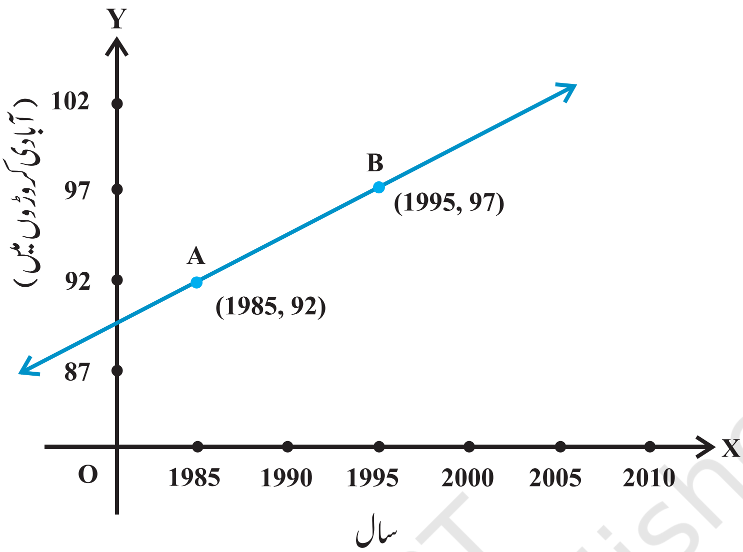
10. x-axis اور اس خط کے درمیان زاویہ معلوم کیجئے جو نقاط (3,-1) اور (4,-2) سے مل کر بنا ہے۔

11. ایک خط کا سلوپ دوسرے خط کے سلوپ کا دوگنا ہے۔ اگر ان کے درمیان کے زاویے کا tangent، $\frac{1}{3}$ ہے تو خطوط کا سلوپ معلوم کیجئے۔

12. ایک خط (x_1,y_1) اور (h,k) سے ہو کر گزر رہا ہے۔ اگر خط کا سلوپ m ہے تو دکھائیے کہ $k-y_1=m(h-x_1)$

13. اگر تین نقاط (h,0)، (a,b) اور (0,k) ایک خط پر واقع ہیں تو دکھائیے کہ $\frac{a}{h}+\frac{b}{k}=1$

14. درجہ ذیل آبادی اور سالانہ گراف پر غور کیجئے (شکل: 10.10)، خط AB کا سلوپ معلوم کیجئے اور اس کا استعمال کر کے معلوم کیجئے کہ 2010 میں آبادی کتنی ہوگی۔



شکل 10.10

10.3 ایک خط کی مساوات کی مختلف قسمیں (Various Forms of the Equation of a Line)

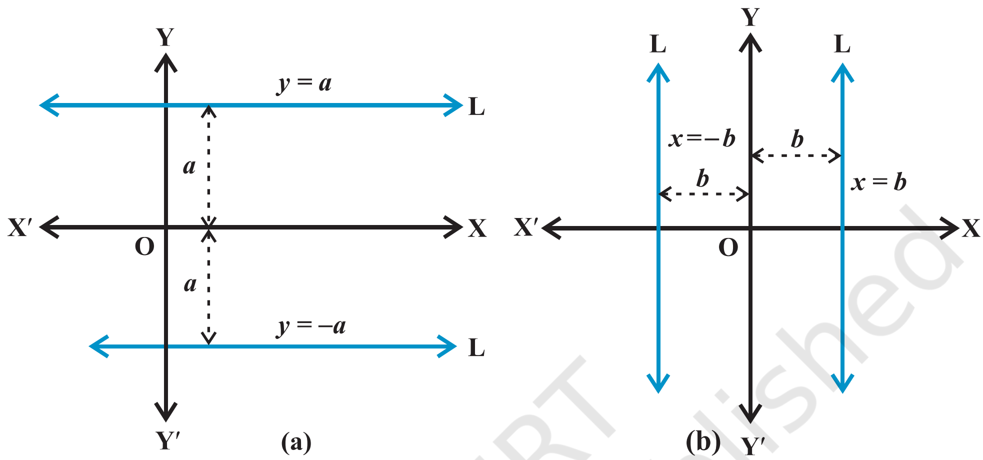
ہم جانتے ہیں کہ ایک مستوی میں ایک خط پر لامحدود نقطے ہوتے ہیں۔ یہ خط اور نقاط کے بیچ رشتہ ہمیں ذیل مسئلہ حل کرنے کی طرف لے جاتا ہے۔

ہم یہ کیسے کہہ سکتے ہیں کہ ایک دیا ہوا نقطہ ایک دیئے ہوئے خط پر واقع ہے؟ اس کا جواب یہ ہوسکتا ہے کہ ایک دیئے خط کے لیے واضح شرط ہونی چاہیئے۔ نقطوں کے خط پر واقع ہونے کی۔ مان لیجئے $P(x,y)$ مستوی xy میں ایک اختیاری نقطہ ہے اور L ایک دیا ہوا نقطہ ہے۔ L کی مساوات کے لیے ہماری یہ خواہش ہے کہ ہم ایک بیان یا شرط تیار کریں، نقطہ P کے لیے جو صحیح ہے، جب کہ P، L پر واقع ہے، ورنہ غلط ہے۔ حالانکہ بیان صرف ایک الجبری مساوات جس میں x اور y متغیرات (Variables) ہیں۔ اب ہم ایک خط کی مساوات پر مختلف شرائط پر بات چیت کریں گے۔

10.3.1 افقی (Horizental) اور راسی (Vertical) خطوط *Horizental and Vetical Line*

اگر ایک افقی خط 'L' x-axis سے a دوری پر ہے تب ہر خط کا عرضی مختص (Ordinate) جو خط پر واقع ہے یا تو 'a' ہے یا '-a' [شکل: 10.11(a)]۔ اس لیے، خط 'L' کی مساوات یا تو $y=a$ یا $y=-a$ ہے نشانوں کا انتخاب خط کی جگہ پر مختصر ہے جیسا کہ

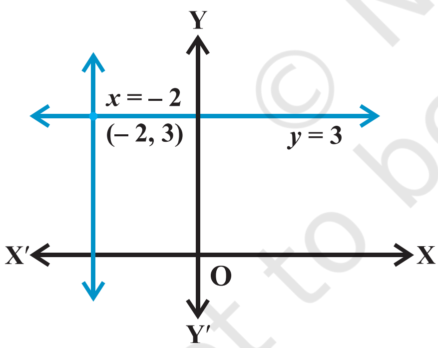
Y-axis کے اوپر ہے یا نیچے۔ اسی طرح، راسی خط کی مساوات X-axis سے فاصلہ b یا تو $x = b$ ہے یا $x = -b$ ہے [شکل: 10.11(b)]



شکل (10.11) (a) (b)

مثال 6

ان خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جو X-aixs کے متوازی ہیں اور (-2,3) سے گزرتی ہیں۔

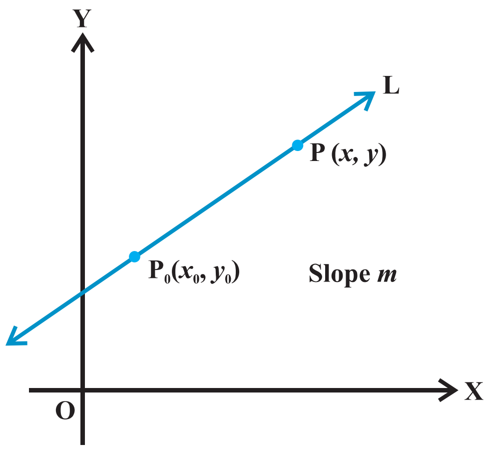


شکل 10.12

حل خطوط کی جگہ شکل 10.12 میں دکھایا گیا ہے۔ y- مختص ہر نقطہ کا متوازی خط پر X-axis سے 3 ہے۔ اس لیے، اس خط کی مساوات جو x-axis کے متوازی ہے اور (-2,3) سے گزر رہی ہے $y = 3$ ہے۔ اسی طرح اس خط کی مساوات جو y-axis کے متوازی ہے اور (-2,3) سے گزر رہی ہے $x = -2$ ہے۔

10.3.2 نقطہ۔سلوپ شکل *Point-slope form*

مان لیجیے $P_0(x_1, y_0)$ ایک مقرر نقطہ ہے غیر راسی خط L پر جس کا سلوپ m ہے۔ مان لیجیے $P(x,y)$ ایک اختیاری نقطہ ہے L پر (شکل: 10.13) اس طرح تعریف سے، L کا سلوپ دیا گیا ہے۔



شکل 10.13

$$(1)\ldots \frac{y-y_0}{x-x_0},\ \text{i,e,}\ y-y_0=m(x-x_0)$$

کیونکہ نقطہ $P(x_0, y_0)$ تمام نقطوں (x,y) کے ساتھ 'L' پر (i) کو مطمئن کرتا ہے اور اس کے علاوہ کوئی اور دوسرا نقطہ مستوی میں (i) کو مطمئن نہیں کرتا۔ اصلیت میں مساوات (i) ہی خط L کے لیے مساوات ہے۔

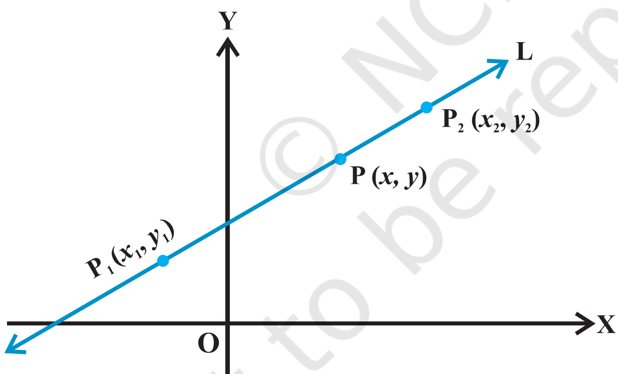
اس طرح، نقطہ (x,y) خط پر واقع ہے جس کا سلوپ m ہے ایک مقرر نقطہ (x_0, y_0) کے ذریعہ اگر اور صرف اگر اس کے مختص ذیل مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔

$$y-y_0=m(x-x_0) \qquad \ldots(ii)$$

مثال 7 اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو (-2,3) سے گزرتا ہے اور جس کا سلوپ (-4) ہے۔

حل یہاں m = - 4 ہے اور دیا ہوا نقطہ (x_0, y_0)، (-2,3) ہے۔ سلوپ۔ مقطوعہ (Slope-intercept) شکل اور اوپر فارمولہ (i) سے، دیئے ہوئے خط کی مساوات ہے۔

y-3 =-4 (x+2) or 4x+y+5=0 جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔



شکل 10.14

10.3.3 دو نقطہ شکل TWO-POINT FORM مان لیجیے کہ خط L دو نقطوں $P_1(x_1,y_1)$ اور $P_2(x_2,y_2)$ سے گزر رہا ہے۔ مان لیجیے P(x,y) خط L پر ایک عام نقطہ ہے۔ (شکل: 10.14)

تینوں نقطے ہم خط نقطے ہیں،اس لیے ہمارے پاس ہے۔ P_1P_2 کا سلوپ = P_1P_2 کا سلوپ

$$\text{i.e.,}\quad \frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\quad \text{or}\quad y-y_0=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x\text{-}x_1)$$

اس طرح اس خط کی مساوات جو نقاط (x_1,y_1) اور (x_2,y_2) سے گزر رہا ہے اس طرح دی گئی ہے۔

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x\text{-}y_1) \qquad ...(2)$$

مثال 8 نقاط $(1,-1)$ اور $(3,5)$ سے گزرنے والے خط کی مساوات لکھئے۔

حل یہاں $x_1=1$ ، $y_1=-1$ ، $x_2=3$ اور $y_2=5$ ہے۔ دو نقطہ شکل (2) اوپر سے استعمال کرنے پر خط کی مساوات کے لیے، ہمارے پاس ہے۔

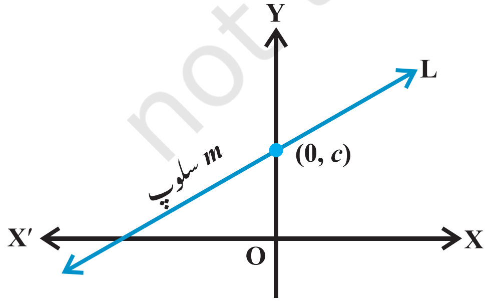
$$y-(-1)=\frac{5-(-1)}{3-1}(x-1)$$

یا $-3x+y+4=0$ جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

10.3.4 سلوپ۔مقطوعہ شکل *Slope-Intercept form*

کبھی کبھی ہمیں ایک خط اس کے سلوپ اور ایک مقطوعہ کسی بھی axes پر سے جانا جاتا ہے۔ اب ہم اس طرح کے خطوط کی مساوات معلوم کریں گے۔

کیس I مان لیجئے ایک خط L جس کا سلوپ m ہے y-axis کو مبدء سے C فاصلے پر کاٹتا ہے (شکل: 10.15) فاصلہ C خط L کا y-intercept کہلاتا ہے۔ صاف طور پر، نقطہ کے مختص جہاں خط Y-axis سے ملتا ہے (o,c) ہیں۔ اس طرح L کا سلوپ m ہے اور مقرر نقطہ (o,c) سے گزرتا ہے۔



شکل 10.15

اس لیے نقطہ۔سلوپ شکل سے L کی مساوات یہ ہے۔

$$y-c=m(x-0) \text{ یا } y=mx+c$$

اس طرح نقطہ (x,y) جس کا سلوپ m اور y-intecept 'C' ایک خط پر واقع ہوتے ہیں صرف اور صرف

$$y = mx + c \quad \text{....(3)}$$

یہ نوٹ کر لیجیے کہ c کی قدر مثبت یا منفی ہوگی جس طرح بالترتیب y- axis intercept کے مثبت یا منفی طرف ہوں گے۔

کیس II مان لیجیے خط L جس کا سلوپ m ہے x-intercep d بناتی ہے۔ 'L' کی مساوات ہے۔

$$y = m\,(x - d) \quad \text{....(4)}$$

طلباء یہ مساوات خود نکال سکتے ہیں اسی طریقہ سے جیسا کہ Case I میں دیا گیا ہے۔

مثال 9 ان خطوط کی مساوات لکھئے جن کے لیے $\tan\theta = \frac{1}{2}$ ، جہاں θ خط کا ڈھلاؤ ہے اور (i) $\text{y-incept} = \frac{-3}{4}$

(ii) x-intercept=4

حل (i) یہاں ہمارے پاس خط کا سلوپ m ہے۔ $\tan\theta = \frac{1}{2}$ اور $\text{y-intercept} \;\; c = -\frac{-3}{2}$ اس لیے اوپری دی ہوئی Slope intercept مساوات (3) سے، خط کی مساوات ہے۔

$y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ یا $2y = -x + 3 = 0$ جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

(ii) یہاں، ہمارے پاس ہے $m = \tan\theta = \frac{1}{2}$ اور $d = 4$ اس لیے اوپری Slope-intercept شکل (4) سے، خط کی مساوات ہے۔

$y = \frac{1}{2}(x - 4)$ یا $2y - x + 4 = 0$ جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

10.3.5 مقطوعہ شکل *Intercept-form*

مان لیا جائے ایک خط L axes (محاور) پر x-axis پر a اور x-axis پر b مقطوعہ بناتا ہے۔ صاف طور پر 'L' x-axis پر نقطہ (a,0) پر ملتا ہے اور y-axis پر نقطہ (0,b) پر ملتا ہے۔ (شکل: 10.16)

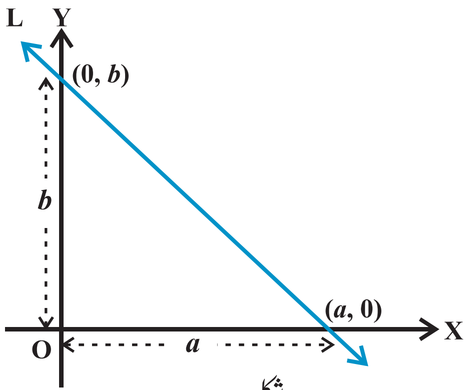
ایک خط کی دو نقطے مساوات کی شکل سے، ہمارے پاس ہے

$$y - 0 = \frac{b - 0}{0 - a}(x - a) \text{ یا } ay = -bx + ab$$

یعنی، $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

اس طرح اس خط کی مساوات بالترتیب جو a اور b مقطوعہ x-axis کے ساتھ بناتی ہیں۔ یہ ہے۔

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \qquad ...(5)$$



شکل 10.16

مثال 10 اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو x-axis اور y-axis کے ساتھ بالترتیب 3- اور 2 کے مقطوعہ (intercept) بنائے۔

حل یہاں a=-3 اور b=2 ہے۔ مقطوعہ شکل (5) اوپر سے خط کی مساوات ہے۔

$$\frac{x}{-3}+\frac{y}{2}=1 \quad \text{یا} \quad 2x-3y+6=0$$

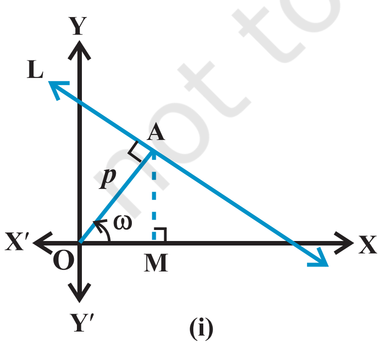
10.3.6 نارمل شکل *(Normal Form)*

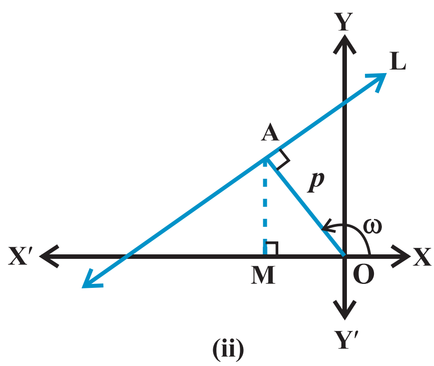
مان لیجیے ایک غیر راسی خط (nonVertical Line) ہمارے علم میں ہے جس کے آنکڑے اس طرح ہیں:

(i) نارمل (عمود) کی لمبائی مبدا (origin) سے خط تک۔

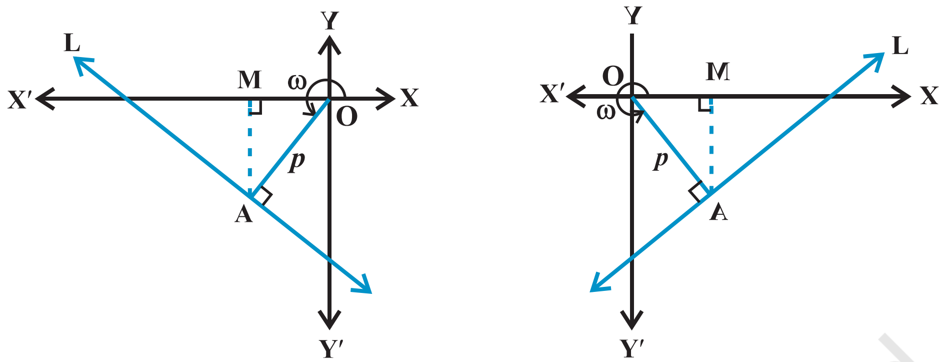
(ii) وہ زاویہ جو نارمل x-axis کی مثبت سمت کے ساتھ بناتا ہے۔

مان لیجیے L وہ خط ہے، جس کا عمودی فاصلہ مبدا O سے p=**OA** ہے اور مثبت x-axis اور **OA** کے درمیان زاویہ





شکل 10.17 (i) (ii)



(iii) (iv)

شکل 10.17 (iii) (iv)

$\angle XOA=\omega$ ہے۔ کارتیزی مستوی میں خط L کی ممکن جگہ شکل 10.17 میں دکھائی گئی ہے۔ اب ہمارا مقصد L کا سلوپ معلوم کرنا اور اس پر ایک نقطہ x-aixs پر عمود AM کھینچیے۔

ہر کیس میں ہمارے پاس ہے $OM=p\cos\omega$ اور $MA=p\sin\omega$، اس لیے نقطہ A کے مختص (Coordinates) ہیں $(p\cos\omega,\ p\sin\omega)$

اس کے آگے خط L، OA پر عمود ہے۔

$$\text{خط L کا سلوپ} = -\frac{1}{\text{slope of OA}} = -\frac{1}{\tan\omega} = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}$$

اس طرح خط L کا سلوپ $-\dfrac{\cos\omega}{\sin\omega}$ ہے اور نقطہ A $(p\cos\omega,\ p\sin\omega)$ اس پر موجود ہے۔ اس لیے نقطہ۔سلوپ شکل سے، خط L کی مساوات ہے۔

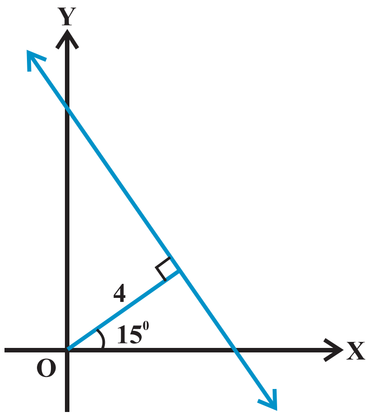
$$y - p\sin\omega = -\frac{\cos\omega}{\sin\omega}(x - p\cos\omega) \quad \text{یا} \quad x\cos\omega + y\sin\omega$$

$$= p(\sin^2\omega + \cos^2\omega)$$

اس طرح، اس خط کی مساوات جس کا مبدا سے نارمل فاصلہ p ہے اور زاویہ ω جو نارمل x-axis کی مثبت سمت کے ساتھ بناتی ہے اس طرح دی ہوئی ہے۔

$$x\cos\omega + y\sin\omega = p \qquad \ldots(6)$$

مثال 11 اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مبدا عمودی فاصلہ 4 اکائی ہے اور زاویہ ω، 15^0 کا ہے۔



شکل10.18

حل یہاں ہمیں دیا ہوا ہے p=4 اور $\omega = 15^0$ (شکل:10.18)

اب $\cos 15^0 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$ اور $\sin 15^0 = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$

(کیوں؟)

اوپر دی ہوئی نارمل شکل؛ (6) سے، خط کی مساوات ہے۔

$$x\cos 15^0 + y\sin 15^0 = 4$$

یا
$$\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}x + \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}y = 4$$

یا
$$(\sqrt{3}+1)x + (\sqrt{3}-1)y = 8\sqrt{2}$$

یہ مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 12 فارن ہائیٹ درجہ حرارت F اور مطلق درجہ حرارت K ایک خطی مساوات کو مطمئن کرتے ہیں۔ دیا ہوا ہے **K**=273 جب F=373 جب F=212۔**K** کو **F** کی شکل میں لکھئے اور **F** کی قدر معلوم کیجیے جب کہ **K**=0 ہو۔

حل فرض کیجئے **F**، x-aixs کے ساتھ ہے اور **K**، y-axis کے ساتھ ہمارے پاس دو نقطے (32,273) اور (212,373) **XY** مستوی میں ہیں۔ دو نقطے۔ شکل سے، نقطہ **(F,K)** مساوات کو مطمئن کرتا ہے۔

$$\text{k-273}=\frac{373\text{-}273}{212\text{-}32}(\text{F-32}) \quad \text{or} \quad \text{k-273}=\frac{100}{180}(\text{F-32})$$

$$\text{or} \quad \text{k}=\frac{5}{9}(\text{F-32})+273 \qquad ...(1)$$ جو کہ مطلوبہ رشتہ ہے۔

جب **K**=0 ہے، مساوات (1) دیتی ہے۔

$$0=\frac{5}{9}(\text{F-32})+273 \quad or \quad F-32=-\frac{273\times 9}{5}=\text{-491.4} \qquad \text{or F=-459.4}$$

متبادل طریقہ ہم جانتے ہیں کہ مساوات کی سب سے آسان شکل y=mx+c ہے۔

دوبارہ غور کرنے پر کہ **F**، x-axis کے ساتھ ہے اور **K**، y-axis کے ساتھ ہے۔ ہم مساوات کو اس شکل میں لے سکتے ہیں۔

$$(1)....k=mF+c$$

مساوات (1)، (32,273) اور (212,373) سے مطمئن ہے۔اس لیے

$$273=32m+c \quad ....(2)$$

اور $$373=212m+c \quad ....(3)$$

(2) اور (3) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$m=\frac{5}{9} \text{ اور } C=\frac{2297}{9}$$

m اور c کی قدریں (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$K=\frac{5}{9}F+\frac{2297}{9} \quad ...(4) \qquad (4)....$$

جو کہ مطلوبہ رشتہ ہے۔ جب کہ K=0، (4) سے حاصل ہوتا ہے F=459.4

نوٹ ہم جانتے ہیں کہ مساوات $y=mx+c$ میں دو مستقل ہیں جن کے نام m اور c ہیں۔ان دو مستقل کو معلوم کرنے کے لیے ہمیں دو شرطوں کی ضرورت ہے جس خط کی مساوات سے مطمئن ہوں۔ مندرجہ بالا تمام مثالوں میں، ہمیں دو شرطیں خط کی مساوات معلوم کرنے کے لیے دی ہوئی ہیں۔

مشق 10.2

1 تا 8 مشقوں میں، خط کی مساوات معلوم کیجیے، جو دی ہوئی شرطوں کی مطمئن کرتی ہے۔

.1 x اور y-axes کے لیے مساواتیں لکھیے۔

.2 جو نقطہ (-4,3) سے گزرتی ہو اور سلوپ $\frac{1}{2}$ ہو۔

.3 نقطہ (0,0) سے گزرتی ہو اور سلوپ m ہو۔

.4 نقطہ $(2,2\sqrt{3})$ سے گزرتی ہو اور x-axis پر 70^0 کے زاویہ ڈھال ہو۔

.5 x-axis کو 3 اکائی فاصلہ پر کاٹتی ہو مبدا کے بائیں طرف اور جس کا سلوپ 2- ہو۔

.6 مبدا کے اوپر y-axis کو 2 اکائی فاصلے پر کاٹتی ہو اور x-axis کی مثبت سمت کے ساتھ 30^0 کا زاویہ بناتی ہے۔

7. نقاط (1,1-) اور (2,-4) سے گزرتی ہو۔

8. ایک خط کی مساوات معلوم کیجیے جس کا مبدا سے عمودی فاصلہ 5 اکائی ہے اور عمود سے مثبت x-axis کے ساتھ بنایا گیا زاویہ 30^0 ہو۔

9. مثلث **PQR** کے راس **P**(2,1)، **Q**(-2,3) اور **R**(4,5) ہیں۔ راس **R** سے گزرنے والے وسطانیہ (median) کی مساوات معلوم کیجیے۔

10. اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ (3,5-) سے گزر رہا ہے اور اس خط پر عمود ہے جو نقاط (2,5) اور (3,6-) سے گزر رہا ہے۔

11. ایک خط جو نقاط (1,0) اور (2,3) سے بننے والے قطعہ خط پر عمود ہے اس قطعہ خط کو 1:n نسبت میں کاٹتا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجیے۔

12. اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو مختص axes پر برابر کے مقطوعہ کاٹتا ہے اور نقطہ (2,3) سے گزرتا ہے۔

13. اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ (2,2) سے گزر رہا ہو اور axis پر مقطوعہ (Intercepts) کاٹتا ہو اور جن کا مجموعہ 9 ہے۔

14. اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو نقطہ (0,2) سے گزرتا ہو اور مثبت x-axis کے ساتھ $\dfrac{2\pi}{3}$ کا زاویہ بناتا ہو۔ ساتھ، اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو اس کے متوازی ہو اور y-axis کو مبدا کے نیچے 2 اکائی فاصلے پر اسے کاٹ رہا ہو۔

15. مبدا سے خط پر عمود نقطہ (2,9-) پر ملتا ہے، خط کی مساوات معلوم کیجیے۔

16. ایک تانبہ کی سلائی کی لمبائی L (سینٹی میٹر میں) اپنے سیلس درجہ حرارت **C** کی خطی تفاعل ہے۔ ایک تجربہ میں، اگر **L**=124.942 جب کہ **C**=20 اور **L**= 125.134 ہے جب **C**=110 ہے۔ **L** کو **C** کی شکل میں دکھایئے۔

17. ایک دودھ کے اسٹور کے دوکاندار کو معلوم ہے کہ وہ 980 لیٹر دودھ ہفتہ میں 14 روپے فی لیٹر کے حساب سے اور 1220 لیٹر دودھ ہر ہفتہ 16 روپے فی لیٹر کے حساب سے بیچ سکتا ہے۔ قیمت فروخت اور مانگ کے درمیان ایک خطی رشتہ مان لیجیے تو بتایئے کہ وہ 17 روپے فی لیٹر کے حساب سے ایک ہفتہ میں کتنا دودھ فروخت کر سکتا ہے۔

18. P(a,b)، axes کے درمیان قطعہ خط کو axes کے درمیان 1:2 نسبت میں تقسیم کرتا ہے، خط کی مساوات معلوم کیجیے۔

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=2$$

.19 نقطہ R(h,k) ایک قطعہ خط کو axes کے درمیان 1:2 نسبت میں تقسیم کرتا ہے۔ خط کی مساوات معلوم کیجئے۔

.20 ایک خط کی مساوات کے تصور کا استعمال کر کے، ثابت کیجئے کہ تین نقاط (3,0)، (-2,-2) اور (8,2) ہم خط نقطہ ہیں۔

10.4 ایک خط کی عام مساوات (General Equation of a Line)

ہم پچھلی جماعتوں میں پہلے درجہ کی عام مساوات دو متغیر میں پڑھ چکے ہیں Ax+By+(C=0) جہاں A، B اور C حقیقی مستقل ہیں تا کہ A اور B ہم وقت غیر صفر ہیں۔ ہمیشہ مساوات Ax+By+C=0 کا گراف ایک سیدھا خط ہوتا ہے۔ اس لیے کوئی بھی مساوات Ax+By+C=0 کی شکل کی جہاں بیک وقت A اور B غیر صفر ہیں ایک خط کی عام خطی مساوات یا عام مساوات کہلاتی ہے۔

10.4.1 Ax+By+C=0 کی مختلف قسمیں Different forms of x+By+C=0 ایک خط کی

عام مساوات کو مساوات کی مختلف قسموں میں تحویل (reduce) کیا جا سکتا ہے مندرجہ ذیل طریقوں کے ذریعہ

(a) سلوپ۔مقطوعہ شکل Slope-intercep form اگر $B \neq 0$ تب $Ax+By+C=0$ کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$Y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B} \quad or \quad Y=mx+c \quad \ldots(1)$$

(1)....

جہاں $m=-\frac{A}{B}$ and $c=-\frac{C}{B}$

ہم جانتے ہیں کہ مساوات (1) ایک خط کی سلوپ۔مقطوعہ شکل ہے ایک مساوات جس کا سلوپ $-\frac{C}{B}$ ہے

اور y-intercept، $-\frac{C}{B}$ ہے۔

اگر B=0، تب $x=-\frac{C}{B}$ جو کہ ایک راسی خط ہے جس کا سلوپ define نہیں کیا گیا ہے۔ اور x-intercept، $-\frac{C}{B}$ ہے۔

(b) مقطوعہ۔شکل Intercept form اگر $C \neq 0$، تب $Ax+By+C=0$ کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$\frac{x}{\frac{C}{A}}+\frac{y}{\frac{C}{A}}=1 \quad or \quad \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

جہاں $a=-\frac{c}{A}$ ہے اور $b=-\frac{c}{B}$

ہم جانتے ہیں کہ مساوات (1) ایک خط کی مقطوعہ شکل جس کا $x-\text{intercept}$ $-\frac{c}{B}$ ہے اور $y-\text{intercept}$ $-\frac{c}{B}$ ہے۔

اگر $C=0$، تب $Ax+By+C=0$ کو اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔ $Ax+By=0$، جو کہ ایک خط ہے جو مبدا سے گزر رہا ہے اور اس لیے axes پر اس کا مقطوعہ صفر ہے۔

(c) نارمل شکل Normal form مان لیجئے $x\cos\omega+y\sin\omega=p$ دیئے ہوئے خط کی نارمل شکل ہے جس کی مساوات $Ax+By+C=0$ یا $Ax+By=-C$ ہے۔ اس لیے دونوں مساوات ایک جیسی ہیں اور اس لیے

$$\frac{A}{\cos\omega}\frac{B}{\sin\omega}=-\frac{C}{p}$$

جو دیتی ہے $\cos\omega=-\frac{Ap}{C}$ اور $\sin\omega=-\frac{Bp}{C}$

اب $\sin^2\omega+\cos^2\omega=(-\frac{Ap}{C})^2+(-\frac{Bp}{C})=1$

یا $or\ p^2=\frac{C^2}{A^2+B^2} \qquad or \quad p=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

اس لیے $\cos\omega=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$ اور $\sin\omega=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$

اس طرح مساوات $Ax+By+C=0$ کی نارمل شکل ہے۔

$$x\cos\omega+y\sin\omega=p$$

جہاں $\cos\omega=\pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\sin\omega=\pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$ اور $P=\pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$

نشانوں کا واجب انتخاب کیا گیا ہے تا کہ p مثبت ہو۔

مثال 13 ایک خط کی مساوات 3x=4y+10=0 ہے۔اس کا (i) سلوپ (ii) x اور Y-intercept معلوم کیجئے۔

حل دی ہوئی مساوات 3x-4y+10=0 کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$y = \frac{3}{4} + \frac{5}{2} \qquad ...(1)$$

(1)....

(i) کا $y=mx+c$ کے ساتھ موازنہ کرنے پر، ہمارے پاس دیئے ہوئے خط کا سلوپ ہے۔ $m = \frac{3}{4}$

(ii) مساوات 3x-4y+10=0 کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔

$$\frac{x}{\frac{-10}{3}} + \frac{y}{\frac{5}{2}} = 1 \qquad ...(2)$$

(2).... $3x$-$4y$=-10 یا

(2) کا $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ کے ساتھ موازنہ کرنے پر، ہمارے پاس x-intercept ہے جیسے $a = \frac{-10}{3}$ اور

y-intercept ہے جیسے $b = \frac{-5}{2}$

مثال 14 مساوات $\sqrt{3}x + y - 8 = 0$ کو نارمل شکل میں چھوٹا کرو اور p اور ω معلوم کرو۔

حل دی ہوئی مساوات ہے۔

$$\sqrt{3}x + y - 8 = 0 \qquad ...(1)$$

(1)....

(1) کو $2 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (1)^2}$ سے تقسیم کرنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y = 4 \quad or \quad \cos 30^0 x + \sin 30^0 y = 4 \qquad ...(2)$$

(2)....

(2) کو موازنہ $x\cos d + y\sin d = p$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔ $p=4$ اور $d = 30^0$ اس طرح عمود کی مبدا ہے خط تک کی لمبائی ہے۔نارمل اور مثبت x-axis کے درمیان کا زاویہ 30^0 ہے۔

مثال 15 خطوط $y - \sqrt{3}x - 5 = 0$ اور $\sqrt{3}y - x - 6 = 0$ کا درمیانی زاویہ معلوم کیجئے۔

حل دیئے ہوئے خط خطوط ہیں۔

$$y - \sqrt{3}x - 5 = 0 \quad or \quad y = \sqrt{3}x + 5 = 0 \qquad (1)....$$

اور

$$\sqrt{3}y - x - 6 = 0 \quad or \quad y = \frac{1}{\sqrt{3}}x - 2\sqrt{3} \qquad (2)....$$

خط (1) کا سلوپ $m_1 = \sqrt{3}$ ہے اور خط (2) کا سلوپ $m_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے زاویہ حادہ (مان لیجئے θ) دو خطوط کے درمیان دیا گیا ہے۔

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| \qquad (3)....$$

m_1 اور m_2 کی قدریں (3) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\tan\theta = \left|\frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}}\right| = \left|\frac{1-3}{2\sqrt{3}}\right| = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

جو دیتا ہے $\theta = 30^0$ ۔ اس طرح دو خطوط کے درمیان زاویہ یا تو 30^0 ہے یا $15^0 = 30 - 180^0$ ہے۔

مثال 16 دکھائیے کہ دو خطوط $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ اور $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ جہاں $b_1, b_2 \neq 0$ ۔
(1) متوازی ہیں اگر $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ (ii) ایک دوسرے پر عمود اگر $a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$

حل دیئے ہوئے دو خطوط اس طرح لکھے جاسکتے ہیں۔

$$y = \frac{a_1}{b_1}x\frac{c_1}{b_1} \qquad (1)....$$

اور

$$y = \frac{a_2}{b_2}x\frac{c_2}{b_2} \qquad (2)....$$

خطوط (1) اور (2) کے سلوپ بالترتیب $m_1 = -\frac{a_1}{b_1}$ اور $m_2 = -\frac{a_2}{b_2}$ ہیں اب

(i) خطوط متوازی ہیں، اگر $m_1 = m_2$ جو دیتا ہے، $-\frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2} \quad or \quad \frac{a_1}{b_1} = -\frac{a_2}{b_2}$

(ii) خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوں گے، اگر $m_1 = m_2 = -1$ جو دیتا ہے۔

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2} = -1 \quad a_1 a_2 + b_1 b_2 = 0$$

مثال 17 ایک خط کی مساوات معلوم کیجیے جو خط x-2y+3=0 پر عمود ہے اور نقطہ (1,-2) سے گزر رہا ہے۔

حل دیا ہوا خط x-2y+3=0 اس طرح بھی لکھا جا سکتا ہے۔

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} \qquad \ldots(1)$$

خط (1) کا سلوپ $m_1 = \frac{1}{2}$ ہے۔ اس لیے اس خط کا سلوپ جو خط (1) پر عمود ہے۔

$$m_2 = -\frac{1}{m_1} = -2$$

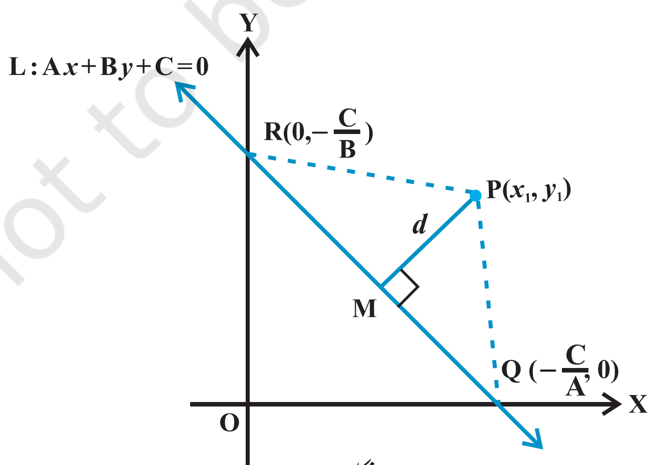
اس خط کی مساوات جس کا سلوپ '2-' ہے اور نقطہ (1,-2) سے گزر رہا ہے۔

$$y-(-2) = -2(x-1) \quad or \quad y = -2x$$

جو کہ مطلوبہ مساوات ہے۔

10.5 ایک نقطے کا ایک خط سے فاصلہ (Distance of a Point From a Line)

ایک نقطے سے ایک خط کا فاصلہ وہ لمبائی ہے۔ جو نقطہ سے خط پر عمود کھینچا جائے۔ مان لیجیے L:Ax+By+C=0 ایک خط ہے جس کا نقطہ $P(x_1, y_1)$ سے فاصلہ d ہے۔ نقطہ P سے خط 'L' پر عمود PM کھینچیے (شکل: 10.19)۔



شکل 10.19

اگرخط x اور y-axis سے بالترتیب نقاط p، Q اور R پر ملتا ہے۔ تب نقاط کے مختص ہیں۔ $Q\left(-\frac{C}{A},0\right)$ and $R\left(0,-\frac{C}{B}\right)$

ہمارے پاس مثلث **PQR** کا رقبہ اس طرح ہے۔

$$\text{area}(\Delta PQR)=\frac{1}{2}PM.QR,\text{which gives } PM=\frac{2\ \text{area}(\Delta PQR)}{QR} \qquad ...(1)$$

ساتھ ہی

$$\text{area}(\Delta PQR)=\frac{1}{2}\left|x_1\left(0+\frac{C}{B}\right)+\left(-\frac{C}{A}\right)\left(-\frac{C}{B}-y_1\right)+0(y_1-0)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|x_1\frac{C}{B}+y_1\frac{C}{A}+\frac{C^2}{AB}\right|$$

$$\text{or} \quad 2\text{area}(\Delta PQR)=\left|\frac{C}{AB}\right|.\left|Ax_1+By_1+C\right|, \text{ and}$$

$$QR=\sqrt{\left(0+\frac{C}{A}\right)^2+\left(\frac{C}{B}-0\right)^2}=\left|\frac{C}{AB}\right|\sqrt{A^2+B^2}$$

area (ΔPQR) اور **QR** کی قدریں (1) میں رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$PM=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

یا

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

اس طرح، خط $Ax+By+C=0$ کا نقطہ (x_1,y_1) سے عمودی فاصلہ (d) اس طرح دیا گیا ہے۔

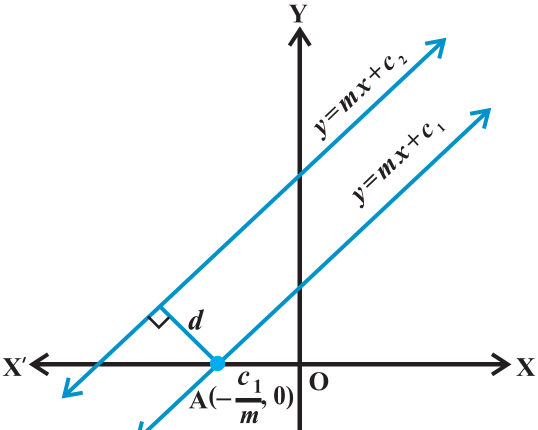
$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

10.5.1 دو متوازی خطوط کے درمیان فاصلہ *Distance between two parallel lines*

ہم جانتے ہیں کہ دو متوازی خطوط کے سلوپ برابر ہیں۔ اس لیے دو متوازی خطوط اس شکل میں لکھے جا سکتے ہیں۔

$$Y=mx+c_1 \qquad ...(1)$$

$$\text{(اور)}\ Y=mx+c_2 \qquad ...(2)$$



شکل 10.20

خط (1) x-axis کو نقطہ $A\left(-\frac{c_1}{m},0\right)$ پر کاٹتا ہے

جیسا کہ شکل 10.20 میں دکھایا گیا ہے۔

دو خطوط کے درمیان فاصلہ عمود کی لمبائی نقطہ A سے خط (2) کے برابر۔ اس لیے خطوط (1) اور (2) کے درمیان فاصلہ یہ ہے۔

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{1+m^2}}=\frac{\left|(-m)\left(-\frac{c_1}{m}\right)+(c_2)\right|}{\sqrt{1+m^2}}$$

اس طرح، دو متوازی خطوط $y=mx+c_1$ اور $y=mx+c_2$ کے درمیان فاصلہ (d) دیا گیا ہے۔

$$d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{1+m^2}}$$

اگر خطوط عام شکل میں دیئے گئے ہیں یعنی $Ax+By+c_1=0$ اور $Ax+By+c_2=0$، تب مندرجہ ذیل بالا فارمولہ یہ شکل لے گا $d=\frac{|c_1-c_2|}{\sqrt{A^2+B^2}}$

طلباء اسے خود حل کر سکتے ہیں۔

مثال 18 نقطہ (3,-5) کا فاصلہ خط $3x-4y-26=0$ سے معلوم کیجیے۔

حل دیا ہوا خط ہے۔

$$3x-4y-26=0 \qquad (1)....$$

(1) کا موازنہ خط کی عام مساوات $Ax+By+c=0$ سے کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$A=3, B=-4 \quad and \quad c=-26$$

دیا ہوا نقطہ ہے $(x_1,y_1)=(3,-5)$ دیئے ہوئے نقطے کا دیئے ہوئے خط سے فاصلہ ہے۔

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+c|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3.3+(-4)(-5)-26|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{3}{5}\ \text{(اکائیاں)}$$

مثال 19 متوازی خطوط $3x-4y+7=0$ اور $3x-4y+5=0$ کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے۔

حل یہاں ہے $A=3$، $B=-4$، $C_1=7$ اور $C_2=5$ ۔اس لیے مطلوبہ فاصلہ ہے۔

$$d=\frac{|7-5|}{\sqrt{(3)^2+(-4)^2}}=\frac{2}{5}\ \text{(اکائیاں)}$$

مشق 10.3

1. ذیل مساوات کو سلوپ۔مقطوعہ (intercep) شکل میں مختصر کیجئے اور ان کے سلوپ اور y-intercepts معلوم کیجئے۔

(i) $x+7y=0$ (ii) $x6+3y-5=0$ (iii) $y=0$

2. ذیل مساوات کو مقطوعہ شکل میں لکھئے اور ان کے مقطوعہ axes پر دریافت کیجئے۔

(i) $3x+2y-12=0$ (ii) $4x-3y=6$ (iii) $3y+2=0$

3. ذیل مساوات کو نارمل شکل میں لکھئے۔ ان کا مبدا سے عمودی فاصلہ معلوم کیجئے اور عمود اور مثبت x-axis کے درمیان زاویہ معلوم کیجئے۔

(i) $x-\sqrt{3}y+8=0$ (ii) $y-2=0$ (iii) $x-y=4$

4. نقطہ (-1,1) کا فاصلہ خط $12(x+6)=5(y-2)$ سے معلوم کیجئے۔

5. x-aixs پر وہ نقاط معلوم کیجئے جن کا خط $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ سے فاصلہ 4 اکائی ہے۔

6. متوازی خطوط کے درمیان فاصلہ معلوم کیجئے۔

(i) $15x+8y-34=0$ اور $15x+8y-31=0$ (ii) $l(x+y)+p=0$ اور $l(x+y)-r=0$

7. اس خط کی مساوات معلوم کرو جو خط $3x-4y+2=0$ کے متوازی ہے اور نقطہ $(-2,3)$ سے گزر رہا ہے۔

8. اس خط کی مساوات معلوم کرو جو خط $x-7y+5=0$ پر عمود ہے اور جس x-intercept، 3 ہے۔

9. خطوط $\sqrt{3}x+y=1$ اور $x+\sqrt{3}y=1$ کے درمیان زاویہ معلوم کیجئے۔

.10 نقاط $(h,3)$ اور $(4,3)$ سے گزرنے والا خط، خط $7x-9y-19=0$ کو زاویہ قائمہ پر کاٹتا ہے۔ h کی قدر معلوم کیجئے۔

.11 ثابت کیجئے کہ نقطہ $(x_1 y_1)$ سے گزرنے والا خط اور خط $Ax+By+C=0$ کے متوازی یہ ہے۔

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)=0$$

.12 نقطہ $(2,3)$ سے گزرنے والے دو خطوط ایک دوسرے کو 60^0 کے زاویہ پر کاٹتے ہیں۔ اگر ایک خط کا سلوپ 2 ہے تو دوسرے خط کے مساوات معلوم کیجئے۔

.13 نقاط $(3,4)$ اور $(-1,2)$ سے بننے والے قطعہ خط کے عمودی ناصف کی مساوات معلوم کیجئے۔

.14 عمود کے پیر کے مختص معلوم کیجئے جو نقطہ $(-1,3)$ سے خط $3x-4y-16=0$ پر ہے۔

.15 مبدا سے عمود خط $y=mx+c$ پر نقطہ $(-1,2)$ پر ملتا ہے۔ m اور c کی قدریں معلوم کیجئے۔

.16 اگر p اور q عمودوں کی لمبائیاں بالترتیب مبدا سے خطوط $x\cos\theta-y\sin\theta=k\cos 2\theta$ اور $x\sec\theta+y\operatorname{cosec}\theta=k$ پر ہیں تو ثابت کیجئے کہ $p^2+4q^2=k^2$ ہے۔

.17 ایک مثلث ABC میں جس کے راس A(2,3)، B(4,-1) اور C(1,2) ہیں۔ A سے ارتقاع (attituded) کی لمبائی اور مساوات معلوم کیجئے۔

.18 اگر p عمود کی لمبائی مبدا سے اس خط تک ہے جس کے axes سے intercepts a اور b ہیں تو دکھایئے کہ

$$\frac{1}{p^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$$

متفرق مثالیں

مثال 20 K کی قدر معلوم کیجئے تا کہ خطوط $3x-y-2=0$، $2x+y-3=0, 5x+ky-3=0$ اور ہم نقطہ ہوں۔

حل تین خطوط اس وقت ہم نقطہ کہلاتے ہیں جب وہ ایک ہی مشترکہ نقطہ سے گزریں۔ اس کا مطلب ہے دو خطوط کا ایک دوسرے کو کاٹنے والا نقطہ، تیسرے خط پر واقع ہوتا ہے۔ یہاں دیئے ہوئے خطوط ہیں۔

$$3x+y-3=0 \quad \ldots 1$$

$$5x + ky - 3 = 0 \qquad \ldots 2$$

$$3x - y - 2 = 0 \qquad \ldots 3$$

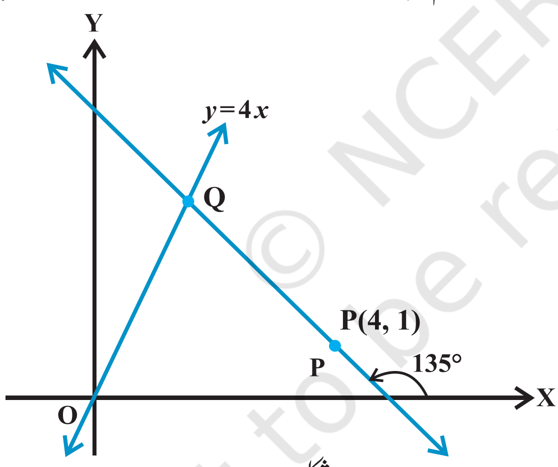
(1)اور(3)کومخلوط یا کراس ضربی عمل سے حل کرنے پر،ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$\frac{x}{-2-3} = \frac{y}{-9+4} = \frac{1}{-2-3} \quad \text{یا} \quad x = 1, y = 1$$

اس لیے دو خطوط کو کاٹنے والا نقطہ ہے (1,1) کیونکہ مندرجہ بالا تینوں خطوط ہم نقطہ ہیں،نقطہ (1,1)مساوات (3) کو مطمئن کرے گا تا کہ:

$$5.1 + k.1 - 3 = 0 \quad \text{یا} \quad k = -2$$

مثال 21 خط $4x - y = 0$ کا نقطہ $P(4,1)$ سے فاصلہ معلوم کیجئے جو کہ مثبت X-aixsکے ساتھ 135^0 کا زاویہ بناتا ہے۔



شکل10.21

حل دیا ہوا خط ہے۔

$$4x - y = 0 \qquad \ldots 1$$

خط (1) کا نقطہ $P(4,1)$ سے فاصلہ معلوم کرنے کی ترتیب ایک دوسرے خط کے ساتھ،ہمیں دونوں خطوط کا نقطہ تقاطع معلوم کرنا ہوگا۔اس کے لیے ہم سب سے پہلے دوسرے خط کی مساوات معلوم کریں گے(شکل 10.21)۔ دوسرے خط کا سلوپ ہے $\tan 135^0 = -1$ اس خط کی مساوات جس کا سلوپ 1- اور نقطہ $P(4,1)$ سے گزر رہا ہے۔

$$y - 1 = -1(n - 4) \quad \text{یا} \quad n + y - 5 = 0 \qquad \ldots 2$$

(1)اور(2)کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔x=1 اور y=4 تا کہ دونوں خطوط کا نقطہ تقاطع **Q**(1,4) ہے۔اب خط (1) کا فاصلہ نقطہ **P**(4,1) سے خط (2) کے ساتھ۔

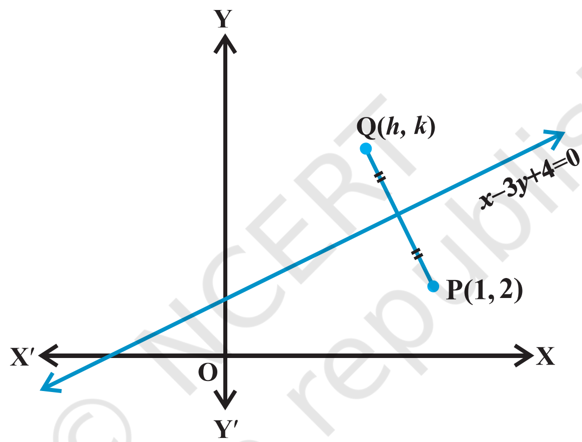
=نقاط $P(4,1)$ اور $Q(1,4)$ کے درمیان کا فاصلہ

$= \sqrt{(1-4)^2+(4-1)^2} = 3\sqrt{2}$ اکائیاں

مثال 22 یہ مان لیجئے کہ سیدھے خطوط ایک نقطے کے لیے سیدھے آئینہ کا کام کرتے ہیں، نقطہ $(1,2)$ کا عکس خط $x-3y+4=0$ میں نکالیے۔

حل مان لیجئے نقطہ $P(1,2)$ کا عکس خط میں نقطہ $Q(h,k)$ ہے۔

$$x-3y+4=0 \qquad \text{....(1)}$$



شکل 10.22

اس لیے خط (1) قطعہ خط PQ کا عمودی ناصف ہے (شکل:10.22)

اس لیے خط **PQ** کا سلوپ مساوات $\dfrac{-1}{x-3y+4=0}$ کا سلوپ

تاکہ $\dfrac{k-2}{h-1} = \dfrac{-1}{\frac{1}{3}}$ یا $3h+k=5$

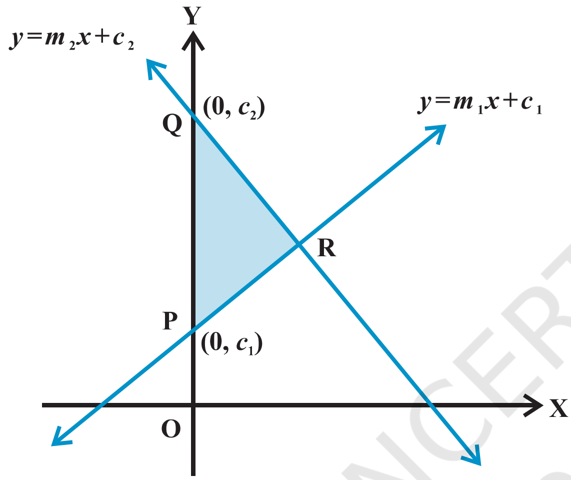
اور **PQ** کا درمیانی نقطہ یعنی $\left(\dfrac{h+1}{2}, \dfrac{k+2}{2}\right)$ جو کہ مساوات (1) کو مطمئن کرے گا تاکہ

$$\frac{h+1}{2} - 3\left(\frac{k+2}{2}\right) + 4 = 0 \text{ یا } h-3k=-3 \qquad \text{....(3)}$$

(2)اور(3)کوحل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $h = \frac{6}{5}$ اور $k = \frac{7}{5}$

اس لئے نقطہ (1,2) کا عکس خط (1) میں ہے $\left(\frac{6}{5}, \frac{7}{5}\right)$

مثال 23 دکھایئے کہ مثلث کا رقبہ جو مساوات $y = m_1x + c_1$ ، $y = m_2x + c_2$ اور $x = 0$ سے بنا ہے $\frac{(c_1 - c_2)^2}{2|m_1 - m_2|}$ ہے۔



شکل10.23

حل دیے ہوئے خطوط ہیں

$$(1)\ y = m_1x + c_1$$

$$(2)\ y = m_2x + c_2$$

$$(3)\ x = 0$$

ہم جانتے ہیں کہ خط $y = mx + c$ ، خط $x = 0$ (y-axis) سے نقطہ (0,c) پر ملتا ہے۔ اس لیے مثلث کے دو راس جو خط (1) اور (3) سے بنے ہیں $P(0, c_1)$ اور $Q(0, c_2)$ ہیں (شکل 10.23)

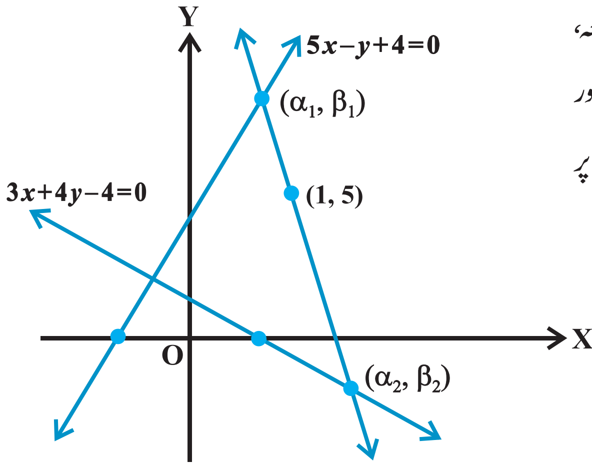
تیسرا راس مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے سے ملے گا۔ (1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے

$$x = \frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)} \quad \text{اور} \quad y = \frac{(m_1c_2 - m_2c_1)}{(m_1 - m_2)}$$

اس لیے مثلث کا تیسرا راس **R** ہے $\left(\frac{(c_2 - c_1)}{(m_1 - m_2)}, \frac{(m_1c_2 - m_2c_1)}{(m_1 - m_2)}\right)$

اب مثلث کا رقبہ

$$= \frac{1}{2}\left| 0\left(\frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2} - c_2\right) + \frac{c_2 - c_1}{m_1 - m_2}(c_2 - c_1) + 0\left(c_1 - \frac{m_1c_2 - m_2c_1}{m_1 - m_2}\right)\right| = \frac{(c_2 - c_1)^2}{2|m_1 - m_2|}$$



شکل 10.24

مثال 24 ایک خط اس طرح ہے کہ اس کا قطعہ، خطوط $5x-y+4=0$ اور $3x+4y-4=0$ کے درمیان نقطہ $(1,5)$ پر ناصف کیا گیا ہے۔اس کی مساوات معلوم کیجیے۔

حل دیے ہوئے خطوط ہیں

$$(1)\ldots\ 5x-y+4=0$$

$$(2)\ldots\ 3x+4y-4=0$$

مان لیجیے مطلوبہ خط، خطوط (1) اور (2) کو نقاط (α_1,β_1) اور (α_2,β_2) پر بالترتیب کاٹتے ہیں۔(شکل:10.24) اس لیے

$$5\alpha_1-\beta_1+4=0 \text{ اور } 3\alpha_2-4\beta_2-4=0$$

یا $\beta_1=5a_1+4$ اور $\beta_2=\dfrac{4-3\alpha_2}{4}$

ہمیں دیا ہوا ہے کہ مطلوبہ خط کے قطعہ کا درمیانی نقطہ (α_1,β_1) اور (α_2,β_2) کے درمیان $(1,5)$ ہے۔اس لیے

$$\frac{\alpha_1+a_2}{2}=1 \text{ اور } \frac{\beta_1+\beta_2}{2}=5$$

یا $\alpha_1+\alpha_2=2$ اور $\dfrac{5\alpha_1+4+\dfrac{4-3\alpha_2}{4}}{2}=5$

یا $\alpha_1+\alpha_2=2$ اور $(3)\ldots\ 20\alpha_1-3\alpha_2=20$

مساوات (3) کو α_1 اور α_2 کے لیے حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\alpha_1=\frac{26}{23} \text{ اور } \alpha_2=\frac{20}{23} \text{ اور اس لیے } \beta_1=5\frac{26}{23}+4=\frac{222}{23}$$

مطلوبہ خط کی مساوات جو $(1,5)$ اور (α_1,β_1) سے گزر رہی ہے

$$y-5=\frac{\beta_1-5}{\alpha_1-1}(x-1) \quad \text{یا} \quad y-5=\frac{\frac{223}{23}-5}{\frac{26}{23}-1}(x-1)$$

یا
$$107x-3y-92=0$$

جوکہ مطلوبہ مساوات ہے۔

مثال 25 دکھایئے کہ ایک چلتے ہوئے نقطہ کا راستہ، تاکہ اس کا فاصلہ دوخطوط $3x-2y=5$ اور $3x+2y=5$ سے برابر ہو، ایک خط ہے۔

حل دیے ہوئے خطوط ہیں

$$3x-2y=5 \quad \ldots(1)$$

$$3x+2y=5 \quad \ldots(2)$$

مان لیجیے کوئی بھی نقطہ (h,k) ہے جس کا فاصلہ خطوط (1) اور (2) سے برابر ہے۔ اس لیے

$$\frac{|3h-2k-5|}{\sqrt{9+4}}=\frac{|3h+2k-5|}{\sqrt{9+4}} \quad \text{یا} \quad |3h-2k-5|=|3h+2k-5|$$

جو دیتا ہے، $3h-2k-5=3h+2k-5$ یا $-(3h-2k-5)=3h+2k-5$

ان دونوں رشتوں کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے، $k=0$ یا $h=\frac{5}{3}$۔ اس طرح نقطہ (h,k) مساوات $y=0$ یا $x=\frac{5}{3}$ کو مطمئن کرتا ہے، جو سیدھے خطوط کو دکھاتا ہے۔ اس لیے دونوں خطوط (1) اور (2) کا راستہ نقطے سے برابر دوری (فاصلہ پر) ایک سیدھا خط ہے۔

متفرق مشق

1. k کی وہ قیمتیں معلوم کیجیے جن کے لیے خط $(k-3)x-(4-k^2)y+k^2-7k+6=0$

(a) x-axis کے متوازی ہے ۔

(b) y-axis کے متوازی ہے۔

(c) مبدا سے گزر رہا ہے۔

.2 θ اور p کی قدریں معلوم کیجیے، اگر مساوات $x\cos\theta + y\sin\theta = p$ خط $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ کی نارمل شکل ہے۔

.3 ان خطوط کی مساوات معلوم کیجیے جو axes پر برابر مقطوعہ (intercepts) کاٹتی ہیں جن کا مجموعہ اور حاصل ضرب بالترتیب 1 اور 6- ہے۔

.4 y-axis پر وہ کون سے نقطے ہیں جن کا فاصلہ خط $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ سے 4 اکائی ہے۔

.5 اس خط کا عمودی فاصلہ مبدا سے معلوم کیجیے جو نقطوں $(\cos\theta, \sin\theta)$ اور $(\cos\phi, \sin\phi)$ کے ملانے سے بنتا ہے۔

.6 اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو y-axis کے متوازی ہے اور خطوط $x - 7y + 5 = 0$ اور $3x + y = 0$ کے نقطہ تقاطع سے کھینچا گیا ہے۔

.7 اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو خط $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ کا عمودی ہے اور اس نقطہ سے جہاں یہ y-axis پر ملتا ہے۔

.8 مثلث کا رقبہ معلوم کیجیے جو خطوط $y - x = 0$ ، $x + y = 0$ اور $x - k = 0$ سے مل کر بنا ہے۔

.9 P کی قیمت معلوم کیجیے تاکہ خطوط $3x + y - 2 = 0$ ، $px + 2y - 3 = 0$ اور $2x - y - 3 = 0$ ایک نقطہ پر کاٹ سکیں۔

.10 اگر تین خطوط، جن کی مساوات تیں $y = m_1x + c_1$ ، $y = m_2x + c_2$ اور $y = m_3x + c_3$ ہیں، ہم نقطہ خطوط ہیں، تو دکھائیے کہ $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$

.11 ان خطوط کی مساوات تیں معلوم کیجیے جو نقطہ (3,2) سے گزر رہے ہیں اور خط $x - 2y = 3$ کے ساتھ $45°$ کا زاویہ بناتے ہیں۔

.12 اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو خطوط $4x + 7y - 3 = 0$ اور $2x - 3y + 1 = 0$ کے نقطہ تقاطع سے گزر رہے ہیں، اور جن کے axes پر برابر مقطوعہ (intercepts) ہیں۔

.13 دکھائیے کہ مساوات جو مبدا سے گزر رہی ہے اور خط $y = mx + c$ کے ساتھ زاویہ θ بنا رہی ہے وہ ہے

$$\frac{y}{x}=\frac{m\pm\tan\theta}{1\mp m\tan\theta}$$

.14 وہ نسبت معلوم کیجیے جس میں نقاط (1,1-) اور (5,7) سے بننے والا خط، خط $x+y=4$ سے تقسیم ہوتا ہے؟

.15 خط $4x+7y+5=0$ کا فاصلہ نقطہ (1,2) سے معلوم کیجیے جو اسی خط $2x-y=0$ کے ساتھ ہے۔

.16 وہ سمت معلوم کیجیے جس میں سیدھا خط نقطہ (1,2-) سے کھینچا جائے تا کہ اس کا نقطہ تقاطع خط $x+y=4$ سے 3 اکائی کے فاصلے پر ہو۔

.17 ایک قائمہ مثلث کے وتر کے سرے نقاط (1,3) اور (4,1-) ہیں۔ مثلث کے ٹانگوں (عمودی ضلع) کی مساوات معلوم کیجیے۔

.18 نقطہ (3,8) کا عکس معلوم کیجیے، خط $x+3y=7$ کے حوالے سے یہ مان کر کہ خط ایک مستوی آئینہ ہے۔

.19 m کی قدر معلوم کیجیے، اگر خطوط $y=3x+1$ اور $2y=x+3$، خط $y=mx+4$ پر برابر کے ڈھلاؤ ہوں۔

.20 اگر متغیر نقطہ P(x,y) کے عمودی فاصلے مساوات $x+y-5=0$ اور $3x-2y+7=0$ سے ہمیشہ 10 ہیں۔ تو دکھایئے کہ P خط پر چلتا ہے۔

.21 اس خط کی مساوات معلوم کیجیے جو متوازی خطوط $9x+6y-7=0$ اور $3x+2y+6=0$ کے بیچ راستے میں ہے۔

.22 روشنی کی ایک شعاع نقطہ (1,2) سے ہو کر گزر رہی ہے، x-axis پر نقطہ A سے منعکس ہوتی ہے اور منعکس شعاع نقطہ (5,3) سے ہو کر گزرتی ہے۔ نقطہ A کے مختص (Co-ordinates) معلوم کیجیے۔

.23 ثابت کیجیے کہ عمودی لمبائیوں کا حاصل ضرب جو نقاط $\left(\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ اور $\left(-\sqrt{a^2-b^2},0\right)$ سے خط $\frac{x}{a}\cos\theta=\frac{y}{b}\sin\theta=1$ پر b^2 ہے۔

.24 ایک انسان دو سیدھے راستوں کے جنکشن پر کھڑا ہے جن راستوں کی مساوات $2x-3y+4=0$ اور $3x+4y-5=0$، اور اس راستے پر جانا چاہتا ہے جس کی مساوات $6x-7y+8=0$ کم سے کم وقت میں۔ اس راستے کی مساوات معلوم کیجیے جس پر وہ چلے۔

خلاصہ (Summary)

- ایک غیر راسی خط جس کا سلوپ (m) ہے نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے ہوکر گزر رہا ہے اس کا سلوپ دیا گیا ہے۔ $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2},\ x_1 \neq x_2$
- اگر ایک خط x-axis کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ $\propto$ بناتا ہے، تب اس خط کا سلوپ دیا گیا ہے $m - \tan\alpha$ ، $\alpha \neq 90°$
- افقی خط کا سلوپ 'صفر' ہے اور راسی خط کا سلوپ بیان نہیں کیا گیا ہے۔
- زاویہ حادّہ (مان لیجیے θ) خطوط L_1 اور L_2 کے درمیان جن کے سلوپ بالترتیب m_1 اور m_2 ہیں، دیا گیا ہے
$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right|, 1 + m_1 m_2 \neq 0$$
- دو خطوط متوازی ہوتے ہیں صرف اور صرف اگر ان کے سلوپ برابر ہوں۔
- دو خطوط ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں صرف اور صرف اگر ان کے سلوپ کا حاصل ضرب '-1' ہے۔
- تین نقاط A، B اور C ہم خط نقطہ ہوں گے، صرف AB کا سلوپ = BC کا سلوپ
- افقی خط کی مساوات جس کا x-axis سے فاصلہ 'a' ہے، y=a ہے یا y =-a
- راسی خط کی مساوات جس کا y-axis سے فاصلہ 'b' ہے یا تو x=b ہے یا x =-b
- نقطہ (x,y) خط پر واقع ہے جس کا سلوپ m ہے اور مقرر نقطہ (x_0, y_0) سے گزر رہا ہے۔ یہ اسی وقت ممکن اگر اس کے مختص مساوات $y - y_0 = m(x - x_0)$ کو مطمئن کرتے ہیں۔
- اس خط کی مساوات جو نقاط (x_1, y_1) اور (x_2, y_2) سے گزر رہا ہے دی گئی ہے $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$
- نقطہ (x,y) ایک خط پر واقع ہے جس کا سلوپ m ہے اور y-intercept، c ہے، اس خط پر موجود ہوگا صرف اور اگر صرف y=mx+c
- اگر ایک خط جس کا سلوپ m ہے، x-intercept، d بناتا ہے، تب خط کی مساوات y = m(n-d) ہے۔

- ایک خط کی مساوات جو x-axis اور y-axis پر بالترتیب a اور b intercepts (مقطوعہ) بناتا ہے، $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ ہے۔
- اس خط کی مساوات جس کا مبدا 'p' سے نارمل فاصلہ ہے، اور نارمل اور مثبت x-axis کے درمیان زاویہ ω ہے $x\cos\omega + y\sin\omega = p$ سے دی گئی ہے۔
- $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}=0$ کی شکل کی کوئی بھی مساوات جہاں A اور B ساتھ ساتھ غیر صفر ہیں، خط کی عام خطی مساوات یا عام مساوات کہلاتی ہیں۔
- $d=\frac{|\mathrm{A}x_1+\mathrm{B}y_1+\mathrm{C}|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$
- متوازی خطوط $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}_1=0$ اور $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}_2=0$ کے درمیان فاصلہ دیا گیا ہے $d=\frac{|C_1-C_2|}{\sqrt{\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2}}$ سے۔