باب 9

تواتر اور سلسلئ
(SEQUENCES AND SERIES)

❖ طبعی اعداد، انسانی جذبات کی پیداوارہیں-DEDEKIND ❖

9.1 تعارف

فلبونا کی
(1175-1250)

ریاضی میں لفظ تواتر لگ بھگ اسی طرح استعمال ہوتا ہے جیسا کہ عام انگریزی میں۔ جب ہم یہ کہتے ہیں کہ اشیاء کا مجموعہ ایک تواتر میں رکھا گیا ہے، تو عام طور پر ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ مجموعہ ایک خاص انداز میں اس طرح رکھا گیا ہے کہ پہچانا ہوا پہلا عدد، دوسرا عدد، تیسرا عدد اور وغیرہ وغیرہ۔ مثال کے طور پر انسانوں یا بیکٹیریا کی آبادی مختلف اوقات پر ایک تواتر بناتی ہے۔ بینک میں جمع کی گئی رقم، پانچ سال سے زیادہ کے لئے ایک تواتر بناتی ہے۔ اشیاء کی گھٹتی ہوئی قیمتیں ایک تواتر میں واقع ہوتی ہیں۔ تواترات بہت سے انسانی حلقوں کی کارکردگی میں اہم کردار (اطلاق) ادا کرتی ہیں۔

جو تواترات ایک خاص پیٹرن (نمونے) کے حساب سے (زیر) کام کرتی ہیں انہیں تصاعد (Progression) کہا جاتا ہے۔ ہم نے پچھلی کلاس میں حسابی تصاعد (Arithmetic Progression A.P) کے بارے میں پڑھا ہے۔ اس سبق میں ہم (A.P) پر اور زیادہ بات چیت کرنے کے علاوہ، حسابی درمیانہ (Arithmetic Mean A.M)، جیومیٹری درمیانہ (Geometric Mean G.M)، A.M اور G.M میں تعلقات، لگاتار n طبعی اعداد کے ارکان کی خاص سلسلئ، طبعی اعداد کے n ارکان کے مربعوں کا جوڑ، طبعی اعداد کے n ارکان کے مکعبوں (Cubes) کا جوڑ کا بھی مطالعہ کریں گے۔

9.2 تواترات (Sequences)

ہمیں ذیل مثالوں پر غور کرنا چاہئے:

مان لیجئے ایک پیڑھی کا فرق 30 سال ہے۔ ہم سے یہ کہا گیا ہے کہ اپنے بزرگوں کی تعداد معلوم کیجئے جن میں ماں باپ، دادادادی، پردادا پردادی وغیرہ شامل ہیں وغیرہ وغیرہ اور وہ لوگ جن کی عمر تقریباً 300 سال سے زیادہ ہو۔

یہاں پیڑھیوں کی کل تعداد $= \frac{300}{30} = 10$

بزرگوں کی تعداد پہلی، دوسری، تیسری، .... اور دسویں پیڑھیوں میں .... ,32 ,16 ,8 ,4 ,2 اور 1024 ممبر ہیں۔ ممبر کے اس سلسلے کو ہم تواتر کہتے ہیں۔

لگاتار خارج قسمت پر غور کیجئے کہ جو ہم 10 کو 3 سے تقسیم کرنے پر مختلف اقدام لیتے ہیں۔ اس عمل میں ہمیں ,3.3 ,3 ....3.333 ,3.33 وغیرہ وغیرہ حاصل ہوتے ہیں۔ یہ خارج قسمت بھی ایک تواتر بناتے ہیں۔ تواتر میں مختلف واقع ہونے والے اعداد ارکان کہلاتے ہیں۔ ہم تواتر کے ارکان کو $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ سے ظاہر کرتے ہیں۔ زیر نوشتے (Subseripts) رکن کی جگہ بتاتے ہیں۔ n^{th} رکن n^{th} جگہ پر تواتر کا عدد ہے اور یہ an سے ظاہر کیا جاتا ہے۔ n^{th} رکن کو تواتر کا عام رکن بھی کہا جاتا ہے۔

اس لئے آباواجداد کے لوگوں کے تواتر کے ارکان جو اوپر دیے ہوئے ہیں یہ ہیں:

$$a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 8, ..., a_{10} = 1024$$

اسی طرح لگاتار خارج قسمت کی مثال ہیں

$$a_1 = 3, a_2 = 3.3, a_3 = 3.33, ..., a_6 = 3.33333,$$

وہ تواتر جس میں ارکان کی تعداد محدود ہو محدود تواتر کہلاتی ہے۔ مثال کے طور پر آباواجداد کی تواتر ایک محدود تواتر کہلاتی ہے کیونکہ اس میں 10 ارکان ہیں۔ (ایک محدود نمبر)

ایک تواتر اس وقت لامحدود کہلاتی ہے جب یہ محدود تواتر نہ ہو۔ مثال کے طور پر لگاتار خارج قسمت کی تواتر جو اوپر دیا گیا ہے لامحدود تواتر کہلاتا ہے، لامحدود اس طرح کہ یہ کبھی ختم نہیں ہوتا۔ کبھی کبھی اس طرح کے اصول کو بتانا بھی ممکن ہوتا ہے جو تواتر کے ارکان کو الجبری فارمولے کی شکل میں دکھائے۔ ایک لمحہ کے لئے جفت طبعی اعداد کی تواتر ...,2,4,6 پر غور کیجئے۔

$$a_1 = 2 = 2x1 \qquad a_2 = 4 = 2x2$$

$$a_3 = 6 = 2x3 \qquad a_4 = 8 = 2x4$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \qquad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

$$a_{23} = 46 = 2x23 \qquad a_{24} = 48 = 2x24$$

دراصل ہم یہ دیکھتے ہیں کہ اس تواتر کی n^{th} رکن کو $a_n = 2n$ ، جہاں n ایک طبعی عدد ہے، بھی لکھا جا سکتا ہے۔ اسی طرح طاق طبعی اعداد کی تواتر ...1,3,5, کی n^{th} رکن کو فارمولہ $a_n = 2n - 1$ جہاں n ایک طبعی عدد ہے سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

کچھ صورت حال میں اعداد کا اظہار مثال کے طور پر ...1,1,2,3,5,8, کا کوئی خاص نمونہ (پیٹرن) نہیں ہوتا۔ لیکن تواتر کو متواتر رشتہ سے نکالا جاتا ہے۔ جیسا کہ دیا گیا ہے۔

$$a_1 = a_2 = 1$$

$$a_3 = a_1 + a_2$$

$$a_n = a_{n-2} + a_{n-1}, n > 2$$

اس تواتر کو Fibonacci sequence کہا جاتا ہے۔

مفرد اعداد ...,2,3,5,7 (Primes nos) کی تواتر میں ہم نے نکالا ہے کہ n^{th} مفرد عدد کے لئے کوئی فارمولہ نہیں ہے۔ اس طرح کی تواتر کو صرف زبانی طریقے سے سمجھا جا سکتا ہے۔

ہر ایک تواتر میں ہمیں یہ امید نہیں رکھنی چاہئے کہ اس کے ارکان کسی خاص فارمولے کی مدد سے دیئے جائیں گے۔ حالانکہ ہمیں ایک نظری اسکیم کی امید ہے یا ایک اصول جس کے ذریعہ ارکان $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n \ldots$ کو لگاتار پیدا کیا جائے۔

9.3 سلسلئ (Series)

مان لیا $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ ایک دی ہوئی تواتر ہے۔ تب وہ عبارت $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$ ایک سلسلئ کہلاتی ہے جو دی ہوئی تواتر کے ساتھ منسلک ہے۔ سلسلئ محدود یا لامحدود ہوگی۔ جیسا کہ دی ہوئی تواتر محدود یا لامحدود ہے۔ سلسلئ زیادہ تر حیت (Compact) شکل میں ظاہر کی جاتی ہیں جسے ہم سگما (Sigma) سے ظاہر کرتے ہیں اور اس Σ (Sigma) گریک "Greek" حرف کا مطلب ہے جمع سازی (Summation)۔ اس لئے سلسلئ

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$ کو $\sum_{k=1}^{n} a_k$ میں مختصر کیا جاتا ہے۔

ریمارک جب سلسلئی استعمال کی جاتی ہے تو اس کا مطلب ہے دکھایا ہوا جوڑ (sum) تاکہ اس کا اپنا جوڑ مثال کے طور پر 1+3+5+7 ایک محدود سلسلئی ہے جس میں چار ارکان ہیں۔ جب ہم ایک چھوٹا جملہ (phrase) ''سلسلی کا جوڑ'' کا استعمال کرتے ہیں۔ ہمارا مطلب ہوتا ہے ارکان کا جوڑ، اس سلسلی کا جوڑ 16 ہے۔

اب ہم کچھ مثالوں پر غور کریں گے۔

مثال 1 نیچے دی گئی ہر ایک تواترات کے پہلے تین ارکان لکھئے جو کہ ذیل طریقے سے واضح کی گئی ہیں۔

(i) $a_n = 2n+5$ (ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$

حل (i) یہاں $a_n = 2n+5$

n=1,2,3 رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a_1 = 2(1)+5 = 7, \quad a_2 = 9, \quad a_3 = 11$$

(ii) $a_n = \frac{n-3}{4}$

$$a_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}, \; a_2 = -\frac{1}{4}, a_3 = 0$$

اس لئے پہلے تین ارکان $-\frac{1}{2}$، $-\frac{1}{4}$ اور صفر '0' ہیں۔

مثال 2 تواتر $a_n = (n-1)(2-n)(3+n)$ کا 20واں رکن ہوگا؟

حل n=20 رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a_{20} = (20-1)(2-20)(3+20)$$

$$= 19x(-18)x(23) = -7866$$

مثال 3 مان لیجئے تواتر an ذیل کی طرح Define کی گئی ہے

$a_1 = 1,\ a_n = a_{n-1} + 2$ for $n \le 2$

پہلے پانچ ارکان نکالیئے اور اس کے مطابق سلسلئ بنائیے۔

حل ہمارے پاس ہے،

$$a_1 = 1,\ a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2 = 3,\ \ a_3 = a_2 + 2 = 3 + 2 = 5,$$
$$a_4 = a_3 + 2 = 5 + 2 = 7,\ \ a_5 = a_4 + 2 = 7 + 2 = 9$$

اس لئے تواتر کے پہلے پانچ ارکان 1,3,5,7 اور 9 ہیں۔ اس کے مطابق سلسلئ ...+1+3+5+7+9 ہے

مشق 9.1

مشق 1 تا 6 تک تواترات کے پہلے 5 ارکان معلوم کیجیے جن کی n^{th} رکن اس طرح ہیں۔

.1 $a_n = n(n+2)$

.2 $a_n = \dfrac{n}{n+1}$

.3 $a_n = 2^n$

.4 $a_n = \dfrac{2n-3}{6}$

.5 $a_n = (-1)^{n-1}\ 5^{n+1}$

.6 $a_n = n\dfrac{n^2+5}{4}$

مشق 7 تا 10 تواترات میں دکھائے گئے ارکان معلوم کیجیے جن کی n^{th} رکن یہ ہیں۔

.7 $a_n = 4n - 3; a_{17}, a_{24}$

.8 $a_n = \dfrac{n^2}{2^n}; a_7$

.9 $a_n (-1)^{n-1} n^3; a_9$

.10 $a = \dfrac{n(n-2)}{n+3}; a_{20}$

مشق 11 تا 13 تواترات کے پہلے پانچ ارکان معلوم کیجیے اور ان کے مطابق سلسلئ معلوم کیجیے۔

.11 $a_1 = 3,\ a_n = 3a_{n-1} + 2$ *for all* $n > 1$

.12 $a_1 = -1, a_n = \dfrac{a_{n-1}}{n}, n > 2$

.13 $a_1 = a_2 = 2,\ a_n = a_{n-a} - 1,\ n > 2$

.14 $1 = a_1 = a_2$ اور $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, n > 2$

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$، for $n = 1,2,3,4,5$

9.6 حسابی تصاعد (Arithmatic Progrssion) (A.P.)

ہم پچھلے پڑھے کچھ فارمولوں اور خاصیتوں کا اعادہ کرتے ہیں۔

تواتر ... $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ اس وقت حسابی تواتر یا خابی تعاعد کہلائے گی اگر $a_{n+1} = a_n + d, n \in N,$ ہو

a_1 پہلا رکن کہلائے گا اور مستقل رکن 'd' A.P کا یکساں فرق کہلائے گا۔

ہم ایک A.P (اپنی اصل شکل میں) پر غور کرتے ہیں جس کا پہلا رکن a اور یکساں فرق d ہے یعنی $a, a+d, a+2d, \ldots$

تب A.P. کا n^{th} رکن (عام رکن) $a_n = a + (n-1)d$ ہے۔

ہم A.P کی ذیل خصوصیات کی تصدیق کر سکتے ہیں۔

(i) اگر A.P کے ہر رکن میں ایک مستقل (Constant) کو جمع کیا جائے۔'' تو نتیجتاً تواتر بھی ایک A.P ہوگی۔

(ii) اگر ایک مستقل کو A.P کی ہر تواتر سے گھٹایا جائے. ،تو نتیجتاً تواتر بھی ایک A.P ہوگی۔

(iii) اگر A.P کے ہر رکن کو ایک مستقل سے ضرب کیا جائے تو نتیجتاً تواتر بھی ایک A.P ہوگی۔

(iv) اگر A.P کے ہر رکن کو ایک غیر صفر مستقل سے تقسیم کیا جائے تب نتیجتاً تواتر بھی ایک A.P ہوگی۔

یہاں ہم ذیل علامتی اظہار کا استعمال حسابی تصاعد میں کریں گے۔

پہلی رکن=a، آخری رکن=l، یکساں فرق=J، ارکان کی تعداد=n

تب، A.P کے n ارکان کا جوڑ S_n

مان لیجیے $a, a+d, a+2d, \ldots, a+(n-1)d$ کو ایک A.P. ہے۔تب

$$S_n = \frac{n}{2}[2a+(n-1)d] \quad \text{(اور)} \quad l=a+(n-1)d$$

ہم یہ بھی لکھ سکتے ہیں $S_n = \frac{n}{2}[a+l]$

ہم اب کچھ مثالوں پر غور کرتے ہیں۔

مثال 4 اگر ایک A.P میں m^{th} رکن n ہے اور n^{th} رکن m ہے جہاں $m \neq n$، تب p^{th} رکن معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $a_m = a + (m-1)d = n$ ...(1)

اور $$a_n = a + (n-1)d = m \quad \ldots(2)$$

(1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(m-n)d = n-m, \text{ یا } d = -1 \quad \ldots(3)$$

اور $$a = n+m-1 \quad \ldots(4)$$

اس لئے $$a_p = a + (p-1)d$$

$$= n+m-1+(p-1)(-1) = n+m-p$$

اس لئے p^{th} رکن $n+m-p$ ہے۔

مثال 5 اگر ایک **A.P** کے n^{th} ارکان کا جوڑ $n\text{P} + \frac{1}{2}n(n-1)\text{Q}$ ہے جہاں P اور Q مستقل ہیں تو یکساں فرق معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے $a_1, a_2, \ldots a_n$ دی ہوئی **A.P** ہے۔

تب $$= \frac{3n+8}{7n+15} \qquad \text{S}_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n = n\text{P} + \frac{1}{2}n(n-1)\text{Q}$$

اس لئے $$\text{S}_1 = a_1 = \text{P}, \text{S}_2 = a_1 + a_2 = 2\text{P} + \text{Q}$$

تاکہ $$a_2 = \text{S}_2 - \text{S}_1 = \text{P} + \text{Q}$$

اس لئے یکساں فرق $$d = a_2 - a_1 = (\text{P}+\text{Q}) - \text{P} = \text{Q}$$

مثال 6 دو حسابی تصاعد کے n ارکان کا جوڑ $(3n+8):(7n+15)$ کی نسبت میں ہے۔ ان کے بارہویں ارکان کی نسبت معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے a_1, a_2 اور d_1, d_2 دو پہلے ارکان اور یکساں فرق ہیں۔ بالترتیب پہلے اور دوسرے حسابی تصاعد کے دیے ہوئے حالات کے مطابق ہمارے پاس ہے

$$\frac{\text{پہلی A.P کے } n \text{ ارکان کا جوڑ}}{\text{دوسری A.P کے } n \text{ ارکان کا جوڑ}} = \frac{3n+8}{7n+15}$$

یا
$$\frac{\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2+(n-1)d_2]}=\frac{3n+8}{7n+15}$$
$$\frac{\text{پہلی A.P کا 12 واں رکن}}{\text{دوسری A.P کا 12 واں رکن}}$$

یا
$$\frac{2a_1+(n-1)d_1}{2a_2+(n-1)d_2}=\frac{3n+8}{7n+15} \quad (1)...$$

اب
$$\frac{\text{پہلی A.P کا 12 واں رکن}}{\text{دوسری A.P کا 12 واں رکن}}=\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}$$

$$\frac{2a_1+22d_1}{2a_2+22d_2}=\frac{3\text{x}23+8}{7\text{x}23+15}$$ مساوات (1) میں n=23 رکھنے پر

اس لئے
$$\frac{a_1+11d_1}{a_2+11d_2}=\frac{7}{16} \qquad =\frac{7}{16}$$

اس لئے مطلوبہ نسبت 7:16 ہے۔

مثال 7 ایک آدمی کی پہلے سال کی آمدنی -/3,00,000 روپئے ہے اور اسے اگلے 19 سال تک کے لئے -/10,000 روپے سالانہ بڑھی ہوئی رقم ملتی ہے۔ بتایئے وہ 20 سال میں کل کتنی رقم حاصل کرے گا۔

حل یہاں ہمارے پاس ایک A.P ہے جس میں a=3,00,000، d=10,000 اور n=20 ہے

جوڑ والا فارمولا استعمال کرنے پر ملتا ہے

$$S_{20}=\frac{20}{2}[600000+19\times10000]=10(790000)=79,000,000$$

اس لئے آدمی کو 20 سال کے آخر میں کل -/79,00,000 روپے ملیں گے۔

9.4.1 حسابی درمیانہ (Arithmetic mean)

دو اعداد a اور b دیئے گئے ہیں۔ ہم ان کے بیچ میں ایک نمبر **A** ڈال سکتے ہیں تاکہ a,A,b ایک **A.P** ہو جائے۔ اس طرح عدد **A** اعداد a اور b کا حسابی درمیانہ **(A.M)** ہے۔ یہ اس کیس میں نوٹ کر لیجئے، ہمارے پاس ہے

$$\text{A}-a=b-\text{A}, \quad ie\ \text{A}=\frac{a+b}{2}$$

ہم A.M کی وضاحت دو اعداد a اور b کے درمیان اس طرح بھی کر سکتے ہیں کہ یہ ان کا درمیانی عدد ہے یعنی $\frac{a+b}{2}$ ۔

مثال کے طور پر دو اعداد 4 اور 16 کا A.M 10 ہے۔ اس طرح ہم نے ایک A.P 4,10,16 بناتی ہے 10 کو 4 اور 6 کے درمیان دو یا دو سے زیادہ اعداد ڈال سکتے ہیں تا کہ نتیجتاً تواتر ایک A.P بن جائے؟ دیکھئے کہ دو اعداد 8 اور 12، 4 اور 16 کے درمیان ڈالے جا سکتے ہیں تا کہ نتیجتاً تواتر 4,8,12,16 ایک A.P بن جائے۔

اور زیادہ عام طور پر دیئے ہوئے دو اعداد a اور b کے درمیان ہم جتنے چاہیں اعداد ڈال سکتے ہیں اور نتیجتاً تواتر ایک A.P ہوگی۔

مان لیجئے $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ a اور b کے درمیان n اعداد ہیں تا کہ $a, A_1, A_2, A_3, ..., A_n, b$ ایک A.P ہو۔

یہاں 'b' $(n+2)^{th}$ رکن ہے۔ $b = a + [(n+2)-1]d = a + (n+1)d$

یہ دیتا ہے $$d = \frac{b-a}{n+1}$$

اس طرح a اور b کے درمیان n اعداد ذیل طرح سے ہیں

$$A_1 = a + d = a + \frac{b-a}{n+1}$$

$$A_2 = a + 2d = a + \frac{2(b-a)}{n+1}$$

$$A_3 = a + 3d = a + \frac{3(b-a)}{n+1}$$

....

....

$$A_n = a + nd = a + \frac{n(b-a)}{n+1}$$

مثال 8 3 اور 24 کے درمیان 6 اعداد لکھئے تا کہ نتیجتاً تواتر ایک A.P ہو۔

حل مان لیجئے 3 اور 24 کے درمیان چھ اعداد A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 اور A_6 ہیں تا کہ

$3, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, 24$ A.P میں ہوں۔ یہاں $a = 3$، $b = 24$، $n = 8$ ہے۔

اس لئے $24 = 3 + (8-1)d$, so that $d = 3$

$$A_1 = a + d = 3 + 3 = 6; \qquad A_2 = a + 2d = 3 + 2 \times 3 = 9;$$

$$A_3 = a + 3d = 3 + 3 \times 3 = 12; \qquad A_4 = a + 4d = 3 + 4 \times 3 = 15;$$

$$A_5 = a + 5d = 3 + 5 \times 3 = 18; \qquad A_6 = a + 6d = 3 + 6 \times 3 = 21.$$

اس طرح 3 اور 24 کے درمیان 6 اعداد 6، 9، 12، 15، 18 اور 21 ہیں۔

مشق 9.2

1. 1 تا 100 تک کے طاق صحیح اعداد کا جوڑ معلوم کیجئے۔
2. 100 اور 1000 کے درمیان آنے والے ایسے طبعی اعداد کا جوڑ معلوم کیجئے جو 5 کے ضعف ہوں۔
3. ایک A.P. میں پہلا رکن 2 ہے اور پہلے 5 ارکان کا جوڑ اگلے پانچ ارکان کے جوڑ کا ایک چوتھائی ہے۔ تو دکھایئے کہ بیسواں رکن (-112) ہے۔
4. ایک A.P.....-5، $-\frac{11}{2}$، -6، میں کتنے ارکان کی ضرورت ہے تا کہ جوڑ -25 ہو جائے؟
5. ایک A.P میں اگر p^{th} رکن $\frac{1}{q}$ ہو اور q^{th} رکن $\frac{1}{p}$ ہو، تو ثابت کیجئے کہ پہلے pq ارکان کا جوڑ $\frac{1}{2}(pq+1)$ ہے، جہاں $p \neq q$ ہے۔
6. اگر A.P.....25، 22، 19 کے کچھ اعداد کا جوڑ 116 ہے تو آخری رکن معلوم کیجئے۔
7. اس A.P کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے جس کا k^{th} رکن $5k+1$ ہے۔
8. اگر ایک A.P کے n ارکان کا جوڑ $(pn + qn^2)$ ہے، جہاں p اور q مستقل ہیں، تو یکساں فرق معلوم کیجئے۔
9. دو حسابی تصاعد کے n ارکان کا جوڑ $5n+4 : 9n+6$ کی نسبت میں ہے، ان کے 18 ویں ارکان کی نسبت معلوم کیجئے۔
10. اگر ایک A.P کے پہلے p ارکان کا جوڑ پہلے q ارکان کے جوڑ کے برابر ہو تو پہلے (p+q) ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔
11. ایک A.P کے پہلے p، q اور r ارکان کا جوڑ بالترتیب a، b اور c ہے۔ تو ثابت کیجئے کہ

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0$$

.12 ایک A.P میں m اور n ارکان کے جوڑوں کی نسبت $m^2:n^2$ ہے، تو دکھایئے کہ m^{th} اور n^{th} رکن کی نسبت $(2m-1):(2n-1)$ ہے۔

.13 اگر ایک A.P کے n ارکان کا جوڑ $3n^2+5n$ ہے اور m^{th} رکن 164 ہے۔ تو m کی قیمت معلوم کیجئے۔

.14 8 اور 26 کے درمیان پانچ اعداد لکھئے تاکہ نتیجتاً تواتر ایک A.P ہو۔

.15 اگر $\frac{a^n+b^n}{a^{n-1}+b^{n-1}}$ ، a اور b کے درمیان A.M ہے، تو n کی قیمت معلوم کیجئے۔

.16 1 اور 31 کے درمیان m اعداد اس طرح داخل کیے گئے ہیں تا کہ 7^{th} اور $(m-1)^{th}$ اعداد کی نسبت 5:9 ہو، تو m کی قیمت معلوم کیجئے۔

.17 ایک آدمی اپنا قرض واپس کرنے میں پہلی قسط 100 روپے دیتا ہے، اگر وہ ہر مہینے اپنی قسط 5 روپے بڑھاتا ہے تو وہ تیسویں قسط میں کتنی رقم دے گا۔

.18 دو لگاتار کثیر ضلعی کے اندرونی زاویوں کا فرق $5°$ ہے۔ اگر سب سے چھوٹا زاویہ $120°$ کا ہو، تو کثیر ضلعی کے ضلعوں کی تعداد معلوم کیجئے۔

9.5 جیومیٹریائی تصاعد (Geometric Progression) (G.P)

ہم ذیل تواترات پر غور کرتے ہیں۔

$$\text{(i) } 2,4,8,16,\ldots, \quad \text{(ii) } \frac{1}{9},\frac{-1}{27},\frac{1}{81},\frac{-1}{243}\ldots \quad \text{(iii) } .01,.0001,.000001,\ldots$$

ان سب ہی تواترات میں ان کے ارکان کیسے آگے بڑھتے ہیں؟ ہم یہ نوٹ کرتے ہیں کہ پہلے رکن کے علاوہ ہر رکن ایک خاص ترتیب میں آگے بڑھتا ہے۔

(i) میں ہمارے پاس ہے $a_1=2,\frac{a_2}{a_1}=2,\frac{a_3}{a_2}=2,\frac{a_4}{a_3}=2$

(ii) میں ہم دیکھتے ہیں کہ $a_1=\frac{1}{9},\frac{a_2}{a_1}=\frac{-1}{3},\frac{a_3}{a_2}=\frac{-1}{3},\frac{a_4}{a_3}=\frac{-1}{3}$ اور اسی طرح آگے تک۔

اسی طرح (iii) میں کس طرح ارکان آگے بڑھتے ہیں؟ یہ دیکھا گیا ہے کہ ہر کیس میں پہلے رکن کے علاوہ ہر رکن میں ایک مستقل نسبت ہوتی ہے اپنے سے بالکل پہلے رکن کے ساتھ۔ (i) میں یہ مستقل نسبت 2 ہے (ii) میں یہ $\frac{-1}{3}$ ہے اور (iii) میں مستقبل نسبت 0.01 ہے۔ اس طرح کی تواترات کو جیومیٹریائی تواترات یا جیومیٹریائی تصاعد کہتے ہیں اور جسے GP سے ظاہر کیا جاتا ہے۔

تواتر ... $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ایک جیومیٹریائی تصاعد کہلاتا ہے اگر ہر رکن غیر صفر ہو اور $\frac{a_{k+1}}{a_k} = r$ (مستقل)، $k \geq 1$ کے لئے۔

$a_1 = a$ ماننے پر ہمیں $a, ar, ar^2, ar^3, ...,$ جیومیٹریائی تصاعد ملتا ہے جہاں a پہلی رکن کہلاتا ہے اور r، G.P کی یکساں نسبت کہلاتی ہے۔ اوپر (i)، (ii) اور (iii) میں جیومیٹریائی تصاعد میں یکساں نسبت بالترتیب 2، $\frac{-1}{3}$ اور 0.01 ہے۔

جس طرح حسابی تصاعد میں n^{th} رکن یا n ارکان کا جوڑ معلوم کرنے کا مسئلہ ایک جیومیٹریائی تصاعد جس میں ارکان بہت زیادہ ہوں ایک مشکل عمل ہے۔ بغیر فارمولہ استعمال کئے جسے ہم اگلے سیکشن میں نکالیں گے۔ ہم ان فارمولوں میں مندرجہ ذیل علامات کا استعمال کریں گے۔

a = پہلا رکن، r = یکساں نسبت، l = آخری رکن، n = ارکان کی تعداد

تب S_n = n ارکان کا جوڑ

9.5.1 G.P کا ایک عام رکن (General term of a G.P)

ہم ایک G.P پر غور کرتے ہیں جس میں پہلا غیر صفر رکن a اور یکساں نسبت r ہے۔ اس کے کچھ ارکان لکھئے۔ دوسرا رکن a اور r سے ضرب کرنے پر ملتا ہے۔ اس لئے $a_2 = ar$، اسی طرح تیسرا رکن a_2 کو r سے ضرب کرنے پر حاصل ہوتا ہے۔ اس لئے $a_3 = a_2r = ar^2$ اور اسی طرح آگے بھی۔

ہم نیچے انہیں اور کچھ اور ارکان کو لکھتے ہیں۔

پہلا رکن $a_1 = a = ar^{1-1}$، دوسرا رکن $a_2 = ar = ar^{2-1}$، تیسرا رکن $a_3 = ar^2 = ar^{3-1}$

چوتھا رکن $a_4 = ar^3 = ar^{4-1}$، پانچواں رکن $a_5 = ar^4 = ar^{5-1}$

کیا آپ نے ایک نمونہ (Pattern) دیکھا؟ سولہواں رکن کیا ہوگا؟

$$a_{16} = ar^{16-1} = ar^{15}$$

اس لئے پیٹرن یہ بتاتا ہے کہ G.P کا n^{th} رکن $a_n = ar^{n-1}$ سے دیا گیا ہے۔

اس طرح G.P کو اس طرح بھی لکھا جاسکتا ہے۔ $a, ar, ar^2, ..., ar^{n-1}...;$ $a, ar, ar^2, ar^3, ...ar^{n-1};$ جیسا کہ G.P بالترتیب محدود ہو۔

سلسلئی $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$ یا $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} + ...$ بالترتیب محدود یا لامحدود جیومیٹریائی سلسلئی کہلاتی ہیں۔

9.5.2 ایک G.P کے n ارکان کا جوڑ (Sum to n terms of a G. P.) مان لیجئے G.P کا پہلا رکن a اور یکساں نسبت r ہے۔ ہم G.P کے پہلے n ارکان کا جوڑ S_n سے ظاہر کرتے ہیں۔ تب

$$S_n = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} \quad ...(1)$$

کیس 1 اگر $r = 1$، $s_n = a + a + a + ... + a\,(n \text{ terms}) = na$

کیس 2 اگر $r \neq 1$، (1) کو r سے ضرب کرنے پر ہمارے پاس ہے

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + ... + ar^n \quad ...(2)$$

(2) کو (1) سے تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n)$

یہ دیتا ہے $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$ یا $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

مثال 9 G.P 5,25,125,... کی دسویں اور n^{th} رکن معلوم کرو۔

حل یہاں $a = 5$ اور $r = 5$ ہے، اس لئے $a_{10} = 5(5)^{10-1} = 5(5)^9 = 5^{10}$

اور $a_n = ar^{n-1} = 5(5)^{n-1} = 5^n$

مثال 10 G.P، 2,8,32,... کی n رکن تک کون سا رکن 131072 ہے؟

حل مان لیجیے 131072 دی ہوئی G.P کی n^{th} رکن ہے۔

اس لئے $131072 = a_n = 2(4)^{n-1}$ یا $65536 = 4^{n-1}$

یہ دیتا ہے $4^8 = 4^{n-1}$

تا کہ $n-1 = 8, \text{i.e.} n = 9$ اس لئے 131072 G.P کی 9^{th} رکن ہے۔

مثال 11 ہے ایک G.P میں تیسرا رکن 24 اور چھٹا رکن 192 ہے۔ دسواں رکن معلوم کیجئے۔

حل یہاں $a_3 = ar^2 = 24$ ...(1)

اور $a_6 = ar^5 = 192$ ...(2)

(2) کو (1) سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $r = 2$ ۔ $r = 2$ (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے $a = 6$

اس لئے $a_{10} = 6(2)^9 = 3072$

مثال 12 جیومیٹرک سلسلئے $1+\frac{2}{3}+\frac{4}{9}+\ldots$ کے n ارکان کا جوڑ اور پہلے 5 ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

حل یہاں $a = 1$ اور $r = \frac{2}{3}$ ہے۔ اس لئے

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]}{1-\frac{2}{3}} = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

خاص طور پر $S_5 = 3\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^5\right] = 3\times\frac{211}{243} = \frac{211}{81}$

مثال 13 G.P $3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \ldots$ کے کتنے ارکان $\frac{3069}{512}$ جوڑ دینے کے لئے درکار ہیں؟

حل مان لیجیے n ارکان کی ضرورت ہے۔ دیا ہوا ہے $a = 3$ ، $r = \frac{1}{2}$ اور $S_n = \frac{3069}{512}$

کیونکہ $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

اس لئے $\dfrac{3069}{512}=\dfrac{3(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=6\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

یا $\dfrac{3069}{3072}=1-\dfrac{1}{2^n}$

یا $\dfrac{1}{2^n}=1-\dfrac{3069}{3072}=\dfrac{3}{3072}=\dfrac{1}{1024}$

یا $2^n=1024=2^{10}$ $\quad n=10$

مثال 14 G.P کے پہلے تین ارکان کا جوڑ $\dfrac{13}{12}$ ہے اور ان کا حاصل ضرب 1- ہے۔ ارکان کی یکساں نسبت معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے $\dfrac{a}{r}$، a، ar G.P کے پہلے تین ارکان ہیں۔ تب،

$$\frac{a}{r}+ar+a=\frac{13}{12} \qquad (1)...$$

اور
$$\left(\frac{a}{r}\right)(a)(ar)=-1 \qquad (2)...$$

ہمیں (2) سے حاصل ہوتا ہے $a^3=-1$ اس کا مطلب $a=-1$ (صرف حقیقی جذر لینے پر)

(1) میں $a=-1$ رکھنے پر ہمارے پاس ہے

$$-\frac{1}{r}-1-r=\frac{13}{12}$$

یا
$$12r^2+25r+12=0$$

یہ r میں دو درجی ہے۔ حل کرنے پر ہمیں ملتا ہے $r=-\dfrac{3}{4}$ یا $-\dfrac{4}{3}$

اس لئے G.P کے تین ارکان ہیں $\dfrac{4}{3}$، -1، $\dfrac{3}{4}$ $r=\dfrac{-3}{4}$ کے لئے اور $r=\dfrac{-4}{3}$ کے لئے $\dfrac{3}{4}$، -1، $\dfrac{4}{3}$

مثال 15 ذیل تواتر کا n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے...,7,77,777,7777

حل یہ G.P نہیں ہے، حالانکہ ہم اس کا G.P سے موازنہ کر سکتے ہیں، ارکان کو اس طرح لکھ کر

$$S_n = 7 + 77 + 777 + 7777 + \ldots \text{to } n \text{ terms}$$

$$= \frac{7}{9}\left[9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots \text{to } n \text{ term}\right]$$

$$= \frac{7}{9}\left[(10-1) + (10^2-1) + (10^3-1) + (10^4-1) + \ldots n \text{ terms}\right]$$

$$= \frac{7}{9}\left[(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots n \text{ terms}) - (1+1+1+\ldots n \text{ terms}\right]$$

$$= \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{10-1} - n\right] == \frac{7}{9}\left[\frac{10(10^n-1)}{9} - n\right]$$

مثال 16 ایک انسان کے دو ماں باپ ہیں، 4 دادا، دادی، نانا، نانی ہیں، 8 پرداد، پردادی، پرنانا پرنانی ہیں اور اس طرح آگے بھی۔ اس کے آباؤ اجداد کی تعداد 10 پیڑھیوں تک اس سے پہلی پیڑھیوں کی معلوم کیجیے۔

حل یہاں $a = 2$ ، $r = 2$ اور $n = 10$ ہیں۔

جوڑ والا فارمولا استعمال کر کے $S_n = \dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

ہمارے پاس ہے $S_{10} = 2(2^{10}-1) = 2046$

اس طرح اس سے پہلے پیڑھیوں کے انسانوں کی تعداد 2046 ہے

9.5.3 جیومیٹریائی درمیانہ (Geometric Mean) (G.M)

دو مثبت اعداد a اور b کا جیومیٹریائی درمیانہ $\sqrt{ab}$ عدد ہے۔ اس لئے 2 اور 8 کا جیومیٹر درمیانہ 4 ہے۔ ہم یہ دیکھتے ہیں کہ تین اعداد 2، 4، 8 **G.P** کے لگاتار ارکان ہیں۔ یہ ہمیں دو اعداد کے درمیانہ کو عام سوچ کی طرف لے جاتا ہے۔ دو مثبت اعداد a اور b کے درمیان ہم جتنے چاہیں اعداد ڈال سکتے ہیں تا کہ نتیجتاً تواتر ایک **G.P** بن جائے۔

مان لیجئے مثبت اعداد a اور b کے درمیان $G_1, G_2, \ldots, G_n$ کو n اعداد میں تا کہ $a, G_1, G_2, G_3, \ldots, G_n, b$ ایک **G.P** ہو۔ اس لئے $(n+2)^{th}$ رکن ہے، ہمارے پاس ہے

$$b = ar^{n+1} \quad \text{یا} \quad r = \left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}}$$

$$G_1 = ar = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{n+1}} \text{ ، } G_2 = ar^2 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{2}{n+1}} \text{ ، } G_3 = ar^3 = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{3}{n+1}}$$

$$G_n = ar^n = a\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{n}{n+1}}$$

مثال 17 1 اور 256 کے درمیان تین اعداد لکھئے تا کہ نتیجتاً تواتر ایک **G.P** ہو۔

حل مان لیجیے G_1, G_2, G_3 '1' اور 256 کے درمیان تین اعداد ہیں۔ تب $1, G_1, G_2, G_3$ 256 ایک **G.P** ہے۔

اس لئے $256 = r^4$ جو $r = \pm 4$ دیتا ہے۔ (صرف حقیقی جزر لینے پر)

$r = 4$ کے لئے ہمارے پاس ہے $G_1 = ar = 4, G_2 = ar^2 = 16, G_3 = ar^3 = 64$

اسی طرح $r = -4$ اعداد ہیں 4-، 16، 64- کو '1' اور '256' کے درمیان لکھ سکتے ہیں تا کہ نتیجتاً تواترات **G.P** میں ہوں۔

9.6 A.M اور G.M کے درمیان رشتہ (Relation Between A.M and G.M)

مان لیجیے A اور G دو دیے ہوئے مثبت اعداد a اور b کے بالترتیب **A.M** اور **G.M** ہیں۔

تب $A = \frac{a+b}{2}$ اور $G = \sqrt{ab}$

اس لئے ہمارے پاس ہے

$$A - G = \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0 \qquad \ldots(1)$$

(1) سے ہم $A \geq G$ کا رشتہ حاصل کیا ہے۔

مثال 18 اگر دو مثبت اعداد a اور b کے A.M اور G.M. بالترتیب 10 اور 8 ہیں۔ اعداد معلوم کیجیے۔

حل دیا گیا ہے $A.M. = \frac{a+b}{2} = 10 \qquad \ldots(1)$

$$= \sqrt{ab} = 8 \qquad \ldots(2)$$

(1)اور(2)سے ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a + b = 20 \qquad \ldots(3)$$

$$ab = 64 \qquad \ldots(4)$$

(3)اور(4)سے a اور b کی قیمتیں اکائی $(a-b)^2 = (a+b)^2 - 4ab$ میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$(a-b)^2 = 400 - 256 = 144$$

یا

$$a - b = \pm 12 \qquad \ldots(5)$$

(3)اور(5) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$a = 4, b = 16 \text{ یا } a = 16, b = 4$$

اس لئے اعداد a اور b بالترتیب 4، 16 ہیں یا 16، 4 ہیں۔

مشق 9.3

1. G.P $\frac{5}{2}, \frac{5}{4}, \frac{5}{8}, \ldots$ کے 20^{th} اور n^{th} ارکان معلوم کیجئے۔
2. اس G.P کا 12^{th} رکن معلوم کیجئے جس کا 8^{th} رکن 192 اور یکساں نسبت 2 ہے۔
3. G.P کے 5^{th}، 8^{th} اور 11^{th} ارکان بالترتیب p، q اور s ہیں۔ دکھایئے $q^2 = ps$
4. G.P کا 4^{th} رکن دوسرے رکن کا مربع ہے اور پہلا رکن 3- ہے۔ 7^{th} رکن معلوم کیجئے۔
5. تواتر کا کون سا رکن

(a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots \text{is } 128?$ (b) $\sqrt{3}, 3, 3\sqrt{3}, \ldots \text{is } 729?$

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots \text{is } \frac{1}{19683}?$

6. x کی کس قیمت کے لیے اعداد $-\frac{2}{7}$، x، $-\frac{2}{7}$، G.P میں ہیں؟

ذیل جیومیٹریائی تصاعد میں دکھائے گئے اعداد کے ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

.7 $0.15, 0.015, 0.0015, ... 20$ terms

.8 $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, ... n$ terms

.9 $1, -a, a^2, -a^3, ... n$ terms (if $a \neq -1$)

.10 $x^3, x^5, x^7, ... n$ terms (if $x \neq \pm 1$)

.11 $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$ کی قیمت کا اندازہ لگائیے۔

.12 G.P کے پہلے تین ارکان کا جوڑ $\frac{39}{10}$ ہے اور ان کا حاصل ضرب 1 ہے۔ یکساں نسبت اور ارکان معلوم کیجئے۔

.13 G.P ... $3, 3^2, 3^3, ...$ کے کتنے ارکان کی ضرورت ہے تاکہ جوڑ 120 ہو جائے؟

.14 G.P کے پہلے تین ارکان کا جوڑ 16 ہے اور اس سے اگلے تین اعداد کا جوڑ 128 ہے۔ پہلا رکن، یکساں نسبت اور G.P کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

.15 ایک دی ہوئی G.P میں $a = 729$ ، 7^{th} رکن 64 ہے۔ S_7 معلوم کیجئے؟

.16 ایک G.P معلوم کیجئے جس میں پہلے دو ارکان کا جوڑ 4- ہے اور پانچواں رکن تیسرے رکن کا چار گنا ہے۔

.17 اگر ایک G.P کے 4^{th} ، 10^{th} اور 16^{th} ارکان بالترتیب x، y اور z ہیں۔ تو ثابت کیجئے کہ x، y اور z G.P میں ہیں۔

.18 تواتر ....8, 88, 888, 8888 کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجئے۔

.19 تواترات 2, 4, 8, 16, 32 اور $\frac{1}{2}$,128, 32, 8, 2 کے مطابق ارکان کا حاصل ضرب کا جوڑ معلوم کیجئے۔

.20 دکھائیے کہ تواترات $a, ar, ar^2, ... ar^{n-1}$ اور $A, AR, AR^2, ... AR^{n-1}$ کے مطابق ارکان کا حاصل ضرب ایک G.P بناتا ہے اور اس کا یکساں نسبت معلوم کیجئے۔

.21 ایک جیومیٹریائی تصاعد کو بنانے کے لئے چار اعداد معلوم کیجئے جن میں تیسرا رکن پہلے رکن سے 9 زیادہ ہے اور دوسرا رکن 4^{th} رکن سے 18 زیادہ ہے۔

.22 اگر ایک G.P کے p^{th} ، q^{th} اور r^{th} ارکان بالترتیب a، b اور c ہیں۔ تو ثابت کیجئے کہ $a^{q-r} b^{r-p} c^{p-q} = 1$

.23 اگر ایک G.P کے پہلے اور n^{th} رکن بالترتیب a اور b ہیں اور P، n ارکان کا حاصل ضرب ہے تو ثابت کیجئے کہ

$$P^2 = (ab)^n$$

24. ثابت کیجئے کہ G.P کے پہلے n ارکان کی کے جوڑ اور $(n+1)^{th}$ سے لے کر $(2n)^{th}$ تک ارکان کے جوڑ کی نسبت $\frac{1}{r^n}$ ہے۔

25. اگر a، b، c اور d G.P میں ہیں تو دکھایئے کہ

$$(a^2+b^2+c^2)(b^2+c^2+d^2) = (ab+bc+cd)^2$$

26. 3 اور 81 کے درمیان دو اعداد بھریئے (لکھئے) تا کہ نتیجتاً تواتر ایک G.P ہو۔

27. n کی قیمت معلوم کیجئے تا کہ $\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$ ، a اور b کے درمیان ایک جیومیٹریائی درمیانہ بن سکے۔

28. دو اعداد کا جوڑ اپنے جیومیٹریائی درمیانہ کا 6 گنا ہے۔ تو دکھایئے کہ اعداد $\left(3+2\sqrt{2}\right):\left(3-2\sqrt{2}\right)$ کی نسبت میں ہیں۔

29. اگر دو مثبت اعداد کے درمیان A اور G بالترتیب A . M اور G . M ہیں، تو ثابت کیجئے کہ اعداد $A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ ہیں۔

30. بیکٹیریاؤں کی تعداد کسی خاص کلچر میں ہر گھنٹے دوگنی ہو رہی ہے۔ اگر ابتدا میں کسی کلچر میں 30 بیکٹیریا موجود تھے، تو بتایئے 2^{nd} ، 4^{th} اور n^{th} گھنٹوں میں کتنے بیکٹیریا ہوں گے؟

31. 500 روپے بینک میں دس سال میں کتنے ہو جائیں گے جب کہ بینک 10 فیصدی شرح سالانہ سے سود دیتا ہے؟

32. اگر ایک دو درجی مساوات کے جزر کے A.M اور G.M بالترتیب 8 اور 5 ہیں تو دو درجی مساوات معلوم کیجئے۔

9.7 کچھ خاص سلسئی کے n ارکان کا جوڑ (Sum to n Terms of some Special Series)

اب ہم کچھ خاص سلسلئی کے پہلے n ارکان کا جوڑ نکالیں گے جو یہ ہیں۔

(i) $1+2+3+\ldots+n$ (پہلے n طبعی اعداد کا جوڑ)

(ii) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2$ (پہلے n طبعی اعداد کے مربعوں کا جوڑ)

(iii) $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$ (پہلے n طبعی اعداد کے کعب کا جوڑ)

ہم انہیں ایک ایک کر کے لیتے ہیں۔

(i) $S_n = 1 + 2 + 3 + ... + n$ $\quad$ $S_n = \frac{n(n+1)}{2}$ (سیکشن 9.4 دیکھیں)

(ii) $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$

ہم اس مماثلت پر غور کرتے ہیں $k^3 - (k-1)^3 = 3k^2 - 3k + 1$

ایک کے بعد ایک K کی قیمت .....,1,2,3 رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$1^3 - 0^3 = 3(1)^2 - 3(1) + 1$$

$$2^3 - 1^3 = 3(2)^2 - 3(2) + 1$$

$$3^3 - 2^3 = 3(3)^2 - 3(3) + 1$$

....

....

....

$$n^3 - (n-1)^3 = 3(n)^2 - 3(n) + 1$$

دوطرف کا جوڑ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$n^3 - 0^3 = 3(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) - 3(1 + 2 + 3 + ... + n) + n$$

$$n^3 = 3\sum_{k-1}^{n} k^2 - 3\sum_{k-1}^{n} k + n$$

(i) سے ہم جانتے ہیں کہ $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

اس لئے $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{3}\left[n^3 + \frac{3n(n+1)}{2} - n\right] = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n)$

$$S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(iii) یہاں $S_n = 1^3 + 2^3 + ... + n^3$

ہم $(k+1)^4 - k^4 = 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$ مماثلت پر غور کرتے ہیں۔

$k = 1, 2, 3 \ldots n$ رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$2^4 - 1^4 = 4(1)^3 + 6(1)^2 + 4(1) + 1$$

$$3^4 - 2^4 = 4(2)^3 + 6(2)^2 + 4(2) + 1$$

$$4^4 - 3^4 = 4(3)^3 + 6(3)^2 + 4(3) + 1$$

....

....

....

$$(n-1)^4 - (n-2)^4 = 4(n-2)^3 + 6(n-2)^2 + 4(n-2) + 1$$

$$n^4 - (n-1)^4 = 4(n-1)^3 + 6(n-1)^2 + 4(n-1) + 1$$

$$(n+1)^4 - n^4 = 4n^3 + 6n^2 + 4n + 1$$

دونوں طرف کا جوڑ کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(n+1)^4 - 1^4 = 4(1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3) + 6(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) + 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + n$$

$$= 4\sum_{k=1}^{n} k^3 + 6\sum_{k=1}^{n} k^2 + 4\sum_{k=1}^{n} k + n \qquad (1)....$$

(i) اور (ii) سے ہم جانتے ہیں کہ

$$= \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{اور} \quad = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

ان قیمتوں کو مساوات (1) میں رکھنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$4\sum_{k=1}^{n} k^3 = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - \frac{6n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} - 2$$

یا

$$4S_n = n^4 + 4n^3 + 6n^2 + 4n - n(2n^2 + 3n + 1) - 2n(n+1) - n$$

$$= n^4 + {}_2n^3 + n^2$$

$$= n^2(n+1)^2$$

اس لئے $$S_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{[n(n+1)]^2}{4}$$

مثال 19 سلسلئ $5+11+19+29+41..$ کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجیے۔

حل ہم لکھتے ہیں

$$S_n = 5+11+19+29+...+a_{n-1}+a_n$$

یا $$S_n = \quad 5+11+19+...+a_{n-2}+a_{n-1}+a_n$$

تفریق کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$0 = 5+[6+8+10+12+...(n-1)\text{ terms}]-a_n$$

یا $$a_n = 5+\frac{(n-1)[12+(n-2)\times 2]}{2}$$

$$= 5+(n-1)(n+4) = n^2+3n+1$$

اس لئے $$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(k^2+3k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{1}^{n} k + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

مثال 20 اس سلسلئ کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجیے جس کا n^{th} رکن $n(n+3)$ ہے۔

حل دیا ہوا ہے $a_n = n(n+3) \quad = n^2+3n$

اس لیے n ارکان کا جوڑ اس طرح دیا گیا ہے

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k^2 + 3\sum_{k=1}^{n} k$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n+5)}{3}$$

مشق 9.4

ذیل سلسلئی کا جوڑ n ارکان کا مشق 1 سے 7 تک میں معلوم کیجیے

.1 $1\times 2+2\times 3+3\times 4+4\times 5+\ldots$

.2 $1\times 2\times 3+2\times 3\times 4+3\times 4\times 5+\ldots$

.3 $3\times 1^2+5\times 2^2+7\times 3^2+\ldots$

.4 $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\ldots$

.5 $5^2+6^2+7^2+\ldots+20^2$

.6 $3\times 8+6\times 11+9\times 14+\ldots$

.7 $1^2+(1^2+2^2)+(1^2+2^2+3^2)+\ldots$

ذیل میں دی گئی سلسلئی کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجیے جن کے n^{th} رکن دیے گئے ہیں

.8 $n(n+1)(n+4)$

.9 n^2+2^n

.10 $(2n-1)^2$

متفرق مثالیں

مثال 21 اگر ایک A.P کے p^{th}، q^{th}، r^{th} اور s^{th} ارکان G.P میں ہوں تو دیکھائیے کہ $(p-q)$، $(q-r)$، $(r-s)$ بھی G.P میں ہوں گے۔

حل یہاں

$$a_p=a+(p-1)d \quad \ldots(1)$$

$$a_q=a+(q-1)d \quad \ldots(2)$$

$$a_r=a+(r-1)d \quad \ldots(3)$$

$$a_s=a+(s-1)d \quad \ldots(4)$$

دیا ہوا ہے کہ a_p, a_q, a_r اور a_s G.P میں ہیں۔

اس لئے

$$\frac{a_q}{a_p}=\frac{a_r}{a_q}=\frac{a_q-a_r}{a_p-a_q}=\frac{q-r}{p-q} \text{ (why?)} \quad \ldots(5)$$

اسی طرح (why?) $\frac{a_r}{a_q} = \frac{a_s}{a_r} = \frac{a_r - a_s}{a_q - a_r} = \frac{r-s}{q-r}$ ....(6)

اس لیے (5) اور (6) سے

$$\frac{q-r}{p-q} = \frac{r-s}{q-r}, \text{i.e., } p-q, q-r \text{ and } r-s \text{ are in G.P}$$

مثال 22 اگر a,b,c **G.P** میں ہوں اور $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}}$ ہو، تو ثابت کیجیے کہ x,y,z **A.P** میں ہیں۔

حل مان لیجیے کہ $a^{\frac{1}{x}} = b^{\frac{1}{y}} = c^{\frac{1}{z}} = k$ تب

$$a = k^x,\ b = k^y,\ c = k^z \quad ....(1)$$

کیونکہ a,b,c **G.P** میں ہیں، اس لیے

$$b^2 = ac \quad ....(2)$$

(1) اور (2) کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$k^{2y} = k^{x+z}, \text{which gives } 2y = x+z$$

اس لیے، x، y اور z **A.P** میں ہیں۔

مثال 23 اگر a، b، c، d اور p مختلف حقیقی اعداد ہیں تا کہ

$$(a^2+b^2+c^2)p^2 - 2(ab+bc+cd)\,p + (b^2+c^2+d^2) \le 0$$

تو ثابت کیجیے کہ a، b، c اور d **G.P** میں ہیں۔

حل دیا ہوا ہے

$$(a^2+b^2+c^2)p^2 - 2(ab+bc+cd)\,p + (b^2+c^2+d^2) \le 0 \quad ....(1)$$

لیکن .L.H.S

$$= (a^2p^2 - 2abp + b^2) + (b^2p^2 - 2bcp + c^2) + (c^2p^2 - 2cdp + d^2),$$

جو دیتا ہے $(ap-b)^2 + (bp-c)^2 + (cp-d)^2 \ge 0$

کیونکہ حقیقی اعداد کے مربعوں کا جوڑ غیر صفر ہے۔ اس لیے (1) اور (2) سے ہمارے پاس ہے

$$(ap-b)^2+(bp-c)^2+(cp-d)^2=0$$

یا
$$ap-b=0,\ bp-c=0,\ cp-d=0$$

یہ دیتا ہے کہ $\frac{b}{a}=\frac{c}{b}=\frac{d}{c}=p$

اس طرح a، b، c اور d **G.P** میں ہیں۔

مثال 24 اگر p، q، r **G.P** میں ہیں اور مساواتوں $px^2+2qx+r=0$ اور $dx^2+2ex+f=0$ کا یکساں جذر ہے، تو دکھائیے کہ $\frac{d}{p},\frac{e}{q},\frac{f}{r}$ **A.P** میں ہیں۔

حل مساوات $px^2+2qx+r=0$ کے جذر المربع اس طرح دیے گئے ہیں

$$x=\frac{-2q\pm\sqrt{4q^2-4rp}}{2p}$$

کیونکہ p، q، r **G.P** میں ہیں۔ اس لئے $q^2=pr$۔ اس سے یہ نکلتا ہے کہ $x=\frac{-q}{p}$ لیکن $\frac{-q}{p}$ بھی $dx^2+2ex+f=0$ کا جذر ہے (کیوں؟)

اس لیے $d\left(\frac{-q}{p}\right)^2+2e\left(\frac{-q}{p}\right)+f=0$

یا
$$dq^2-2eqp+fp^2=0$$

(1) کو pq^2 سے تقسیم کرنے پر اور $q^2=pr$ کا استعمال کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\frac{d}{p}-\frac{2e}{q}+\frac{fp}{pr}=0 \quad \text{یا} \quad \frac{2e}{q}=\frac{d}{p}+\frac{f}{r}$$

اس لیے $\frac{d}{p},\frac{e}{q},\frac{f}{r}$ **A.P** میں ہیں۔

متفرق مشق

1. دکھایئے کہ ایک A.P کے ارکان $(m+n)^{th}$ اور $(m-n)^{th}$ کا جوڑ m^{th} رکن سے دوگنا ہے۔

2. اگر ایک A.P کے تین ارکان کا جوڑ 24 ہے اور ان کا حاصل ضرب 440 ہے تو اعداد معلوم کیجیے۔

3. مان لیجیے ایک A.P کے n، $2n$، $3n$ ارکان کا جوڑ بالترتیب S_1 ، S_2 اور S_3 ہے، تو دکھایئے کہ $S_3 = 3(S_2 - S_1)$

4. 200 اور 400 کے درمیان ان تمام اعداد کا جوڑ معلوم کیجیے جو 7 سے تقسیم ہوتے ہیں۔

5. 1 تا 100 تک آنے والے ان سبھی صحیح اعداد کا جوڑ معلوم کیجیے جو 2 یا 5 سے تقسیم ہوتے ہیں۔

6. ان سب ہی دو ہندسی اعداد کا جوڑ معلوم کیجیے جنہیں 4 سے تقسیم کرنے پر ہمیشہ 1 بچتا ہے۔

7. اگر f فنکشن $f(x+y) = f(x)f(y)$ تمام $x, y \in \mathbf{N}$ میں ہیں کو مطمئن کرتا ہے تا کہ $f(1) = 3$ اور $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ تو n کی قیمت معلوم کیجیے۔

8. ایک G.P کے کچھ ارکان کا جوڑ 315 ہے جس کا پہلا رکن اور یکساں نسبت بالترتیب 5 اور 2 ہیں۔ اس کے آخری رکن اور کل ارکان معلوم کیجیے۔

9. ایک G.P کا پہلا رکن 1 ہے۔ تیسرے اور پانچویں رکن کا جوڑ 90 ہے۔ G.P کی یکساں نسبت معلوم کیجیے۔

10. ایک G.P میں تین ارکان کا جوڑ 56 ہے۔ اگر ہم ان ارکان سے 1، 7، 21 کو اسی ترتیب میں گھٹائیں تو ہمیں ایک حسابی تصاعد ملتا ہے۔ اعداد معلوم کیجیے۔

11. ایک G.P میں ارکان کی تعداد جفت ہے۔ اگر تمام ارکان کا جوڑ طاق جگہ پر آنے والے ارکان کے جوڑ کا پانچ گنا ہے تو اس کی یکساں نسبت معلوم کیجیے۔

12. ایک A.P کے پہلے چار ارکان کا جوڑ 56 ہے۔ بعد کے چار ارکان کا جوڑ 112 ہے۔ اگر اس کا پہلا رکن 11 ہے تو ارکان کی تعداد معلوم کیجیے۔

13. اگر $(x \neq 0)$ $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$، تو دکھایئے کہ a، b، c اور d G.P میں ہیں۔

14. مان لیجیے ایک G.P میں n ارکان کا جوڑ S ہے، P حاصل ضرب ہے اور R n ارکان کے جوڑ کا الٹا ہے۔ تو ثابت کیجیے کہ $P^2R^n = S^n$

.15 ایک A.P کے p^{th} ، q^{th} اور r^{th} ارکان بالترتیب a،b،cاور d **G.P** میں ہیں۔تو دکھایئے کہ

$$(q-r)a+(r-p)b+(p-q)c=0$$

.16 اگر $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ، $b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ ، $c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ ایک **A.P** میں ہےتو ثابت کیجیے کہ a,b,c **A.P** میں ہیں۔

.17 اگر a،b،c **A.P** میں ہیں تو ثابت کیجیے کہ (a^n+b^n) ، (b^n+c^n) ، (c^n+d^n) **G.P** میں ہیں۔

.18 اگر $x^2-3x+p=0$ کے جذر a اور b ہیں اور c،d $x^2-12x+q=0$ کے جذر ہیں، جہاں a،b،c،d ایک **G.P** بناتے ہیں۔تو ثابت کیجیے کہ $(q+p):(q-p)=17:15$

.19 دو مثبت اعداد a اور b کے **A.M** اور **G.M** کی نسبت m:n ہے۔دکھایئے کہ

$$a:b=\left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right):\left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right)$$

.20 اگر a،b،c، **A.P** میں ہیں؛ b،c،d **G.P** میں ہیں اور $\frac{1}{c}$ ، $\frac{1}{d}$ ، $\frac{1}{e}$ ؛ **A.P** میں ہیں۔ثابت کیجیے کہ a،c،e **G.P** میں ہیں۔

.21 ذیل سلسلئی کا جوڑ n ارکان تک معلوم کیجیے۔

(i) $5+55+555+\ldots$ (ii) $.6+.66+.666+\ldots$

.22 سلسلئی $2\times4+4\times6+6\times8+\ldots+n\text{ terms}$ کا 20^{th} رکن معلوم کیجیے۔

.23 سلسلئی $3+7+13+21+31+\ldots$ کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجیے۔

.24 اگر پہلے n طبعی اعداد کا جوڑ ان کے مربع کا جوڑ اور کعب کا جوڑ بالترتیب S_1، S_2 اور S_3 ہے،تو دکھایئے کہ

$$9S_2^2=S_3(1+8S_1)$$

.25 ذیل سلسلئی کے n ارکان کا جوڑ معلوم کیجیے $\frac{1^3}{1}+\frac{1^3+2^3}{1+3}+\frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5}+\ldots$

.26 دکھایئے کہ $\frac{1\times2^2+2\times3^2+\ldots+n\times(n+1)^2}{1^2\times2+2^2\times3+\ldots+n^2\times(n+1)}=\frac{3n+5}{3n+1}$

.27 ایک کسان ایک ٹریکٹر 12000 روپے میں خریدتا ہے۔اس وقت وہ 6000 روپے دینے کو تیار ہو جاتا ہے اور باقی رقم 500

روپے کی سالانہ قسط اور ساتھ ہی بچی ہوئی رقم پر%12 شرح سالانہ سود دیتا ہے۔ بتائیے کسان کو ٹریکٹر کتنے کا پڑا؟

28. شمشاد علی ایک اسکوٹر 22000 میں خریدتا ہے۔ وہ 4000 روپے نقد دیتا ہے اور باقی رقم کو 1000 روپے کی سالانہ قسط اور %10 شرح سالانہ سے بچی ہوئی رقم سود دیتا ہے۔ بتائیے اسے اسکوٹر کتنی رقم کا پڑا۔

29. ایک انسان اپنے چار دوستوں کو خط لکھتا ہے۔ وہ ان میں ہر ایک سے کہتا ہے کہ اس کی نقل کر کے وہ آگے چار کو بھیج دیں اور یہ تاکید کرتا ہے کہ یہ سلسلہ اسی طرح آگے چلتا رہے۔ اگر ہم یہ مان لیں کہ سلسلہ نہیں ٹوٹا ہے اور ہر خط بھیجنے میں 50 پیسے لگتے ہیں تو خط و کتابت پر خرچ معلوم کیجیے جب کہ 8واں سیٹ خطوط کا پوسٹ کیا گیا ہو۔

30. ایک آدمی بینک میں 10,000 روپے جمع کرتا ہے جس پر %5 شرح سالانہ سے سود مفرد ملتا ہے۔ 15 سال بعد اسے ملنے والی کل رقم بتائیے اور ساتھ ہی بتائیے 20 سال میں کل کتنی رقم بنے گی۔

31. ایک صنعت کار یہ بتاتا ہے کہ ایک مشین کی قیمت جو اسے 15625 روپے میں ملتی ہے ہر سال اس کی قیمت %20 کم ہو جاتی ہے۔ 5 سال بعد اس کی قیمت معلوم کیجیے۔

32. 150 مزدور ایک کام کو کچھ دنوں میں مکمل کرنے کے لیے کام پر لگائے گئے۔ 4 مزدور دوسرے دن نکال دیے گئے، 4 اور تیسرے دن نکال دیے گئے اور اسی طرح آگے بھی۔ کام ختم کرنے میں 8 دن اور زیادہ لگے۔ کل دنوں کی تعداد معلوم کیجیے جن میں کام ختم ہوا۔

خلاصہ (Summery)

- تواتر سے ہمارا مطلب ہے ایک عدد کا انتظام ایک خاص مرتب میں کسی اصول کے تحت۔ ساتھ ہی ہم تواتر کی تعریف اس طرح بیان کرتے ہیں کہ یہ ایک تفاعل ہے جس کا علاقہ طبعی اعداد کا سیٹ ہے یا کوئی ماتحت سیٹ اس طرح کا $\{1, 2, 3, \ldots k\}$۔ ایک تواتر جس میں ارکان کی تعداد محدود ہوتی ہے وہ محدود تواتر کہلاتی ہے۔ ایک تواتر لامحدود کہلاتی ہے اگر یہ محدود تواتر نہیں ہوتی۔
- مان لیجیے $a_1, a_2, a_3, \ldots.$ کوئی تواتر ہے، تب اظہار کرنے والا مجموعہ ایسے لکھا جاتا ہے $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots.$ جو سلسلئی کہلاتا ہے۔
- ایک حسابی تصاعد (arithmetic progression) ایک تواتر ہے جس میں ارکان گھٹتے اور بڑھتے ہیں ایک ہی

constant سے۔ یہ............A.P میں مشترک فرق کہلاتا ہے۔عام طور پر ہم A.P کے پہلے ارکان کو a ظاہر کرتے ہیں، مشترک فرق d سے اور آخری رکن l سے۔ A.P کے n^{th} رکن کا عام رکن اس طرح دیا جاتا ہے۔

◆ $a_n = a + (n-1)d$

A.P کے پہلے ارکان کا مجموعہ S_n اس طرح دیا جاتا ہے۔

$$S_n = \frac{n}{2}\left[2a + (n-1)d\right] = \frac{n}{2}(a+l)$$

◆ کن ہی دو اعداد a اور b کا حسابی درمیان A، $\frac{a+b}{2}$ سے دیا جاتا ہے۔اس کا مطلب ہے تواتر a,A,b A.P میں ہیں۔

ایک تواتر ایک جیومیٹریائی تصاعد یا G.P کہلاتی ہے۔اگر اس کے کسی بھی رکن کی نسبت اپنے سے پہلے رکن کے ساتھ آگے تک ایک ہو، یہ مستقل اجزائے ضربی مشترک کہلاتا ہے۔عام طور پر ہم G.P کے پہلے رکن کو a سے اور اس کے مستقل نسبت کو r سے ظاہر کرتے ہیں۔عام یا G.P کا n^{th} رکن $a_n = ar^{n-1}$ سے دیا (لکھا) جاتا ہے۔G.P کے پہلے n ارکان کا جوڑ (مجموعہ) S_n

$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$ یا $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$، اگر $r \neq 1$ سے دیا جاتا ہے۔

◆ کن ہی دو مثبت اعداد a اور b کا جیومیٹریائی درمیان $\sqrt{ab}$ سے دیا جاتا ہے۔اس کا مطلب تواتر a,G,b G.P میں ہے۔

تاریخ کے اوراق سے (Historical Note)

اس بات کے ثبوت ملے ہیں کہ بے بی لونینس (Babylonians)، کچھ 4000 سال پہلے حساب اور جیومیٹریائی تواتر جانتے تھے۔ بیوتھس (Beothius) (510 A.D) کے مطابق پہلے کے یونانی (Greek) مصنف، حساب اور جیومیٹریائی تواترات جانتے تھے۔ہندوستانی ریاضی دانوں میں سے آریہ بھٹ (Aryabhatta)(476A.D) سب سے پہلا شخص تھا جس نے طبعی اعداد کے مربعوں اور کعبوں کے مجموعہ کے فارمولے اپنے مشہور کام آریہ بھاٹیم (Aryabhatiyam) میں دیے ہیں اور 499A.D. کے اریب قریب لکھا گیا ہے۔اس نے حسابی تواتر جو p^{th} رکن سے شروع ہو رہی ہو، کے n ارکان کا مجموعہ معلوم کرنے کے لیے بھی فارمولہ دیا تھا۔مشہور ہندوستانی ریاضی دانوں برہم گپتا (Brahmgupta)(598

(A.D، مہاویر(Mahavira) (850 A.D) اور بھاسکر(Bhaskara)(1114-1185 A.D) نے بھی مربعوں اور کعبوں کے مجموعہ پر غور کیا تھا۔ ایک دوسری خاص قسم کی تواتر جس کی ریاضی میں بہت اہم استعمال ہے فیبوناسی تواتر (Fibonacci sequence) کہلاتی ہے، جسے اٹلی کے ریاضی داں لیونارڈو فیبوناسی (Leonardo Fibonacci) (1170-1250A.D) نے ایجاد کیا تھا۔ 17ویں صدی نے سلسلئی کی درجہ بندی خاص شکل میں دیکھی ہے اوراس بات کی گواہ ہے۔A.D 1671 میں جیمس گریگوری(James Gregory) نے لامحدود سلسلئی کے رکن کا استعمال لامحدود تواتر کے میل(Connection) کے ساتھ کیا تھا۔ یہ الجبری اور تھیوریٹک ٹول کے سختی سے ترقی کا ہی نتیجہ ہے جس کے ذریعہ تواتر اور سلسلئی کی سوچ کو عملی جامہ پہنایا جاسکا۔