8 باب

دورکنی مسئلہ
(BIONOMIAL THEOREM)

❖ "ریاضی سب سے درست تجربی علوم ہے اور اس کے نتائج یکسر (مطلق) ثبوت دینے کیلئے خود کفیل ہیں"۔ سی-پی-اسٹیمنس C. P. STEIMETZ ❖

8.1 تعارف (Introduction)

بلائس پسکل
(1623-1662)

پچھلی جماعتوں میں ہم یہ سیکھ چکے ہیں کہ دورکنیوں جیسے $a+b$ اور $a-b$ کے مربع اور کعب کیسے معلوم کئے جاتے ہیں۔ ان کا استعمال کرکے، ہم اعداد کی عددی قدریں معلوم کر سکتے ہیں جیسے $(98)^2 = (100-2)^2$ ، $(999)^3 = (1000-1)^3$ وغیرہ۔ حالانکہ اونچی طاقت جیسے $(98)^5$ ، $(101)^6$ وغیرہ کا حساب لگانا مشکل ہوجاتا ہے اس ضرب کے دہرانے سے۔ دورکنی مسئلہ کا استعمال کرکے اس پریشانی کے اوپر قابو پالیا گیا تھا۔ یہ $(a+b)^n$ کھولنے کا آسان طریقہ دیتی ہے جہاں n ایک صحیح عدد ہے یا ناطق عدد ہے۔ اس سبق میں ہم دورکنی مسئلہ کو صرف مثبت صحیح قوت نما کے لئے پڑھیں گے۔

8.2 دورکنی مسئلہ مثبت صحیح قوت نما کیلئے
(Binomial Theorem for Positive Integral Indices)

آیئے ہم پہلے کی گئی مماثلتوں پر غور کریں

$$(a+b)^0 = 1 \qquad a+b \neq 0$$

$$(a+b)^1 = a+b$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b)^4 = (a+b)^3(a+b) = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

ان سب کے پھیلاؤ میں دیکھتے ہیں کہ:

(i) پھیلاؤ میں رکنوں کی تعداد قوت نما سے ایک زیادہ ہے۔ مثال کے طور پر $(a+b)^2$ کے پھیلاؤ میں رکنوں کی تعداد 3 ہے جبکہ $(a+b)^2$ کا قوت نما 2 ہے۔

(ii) پہلی رقم 'a' کی طاقت متواتر ایک ایک کم ہوتی جاتی ہے جبکہ دوسری مقدار b کی طاقت متواتر ایک ایک بڑھتی جاتی ہے متواتر رکنیوں کی۔

(iii) پھیلاؤ کی ہر ایک رکن میں a اور b کے قوت نماؤں کا جوڑ ایک جیسا اور $(a+b)$ کے قوت نما کے برابر ہے۔

ان سب پھیلاؤ میں ضریب کو ہم اس طرح ترتیب دیتے ہیں جیسا کہ ذیل میں دیا گیا ہے۔

Index	**Coefficients**
0	**1**
1	**1 1**
2	**1 2 1**
3	**1 3 3 1**
4	**1 4 6 4 1**

شکل 8.1

کیا ہمیں اس جدول میں کوئی نمونہ دکھائی دیتا ہے جو ہماری اگلی قطار لکھنے میں مدد کرے گا؟ ہاں، ہمیں دکھائی دیتا ہے، یہ دیکھا جا سکتا ہے کہ قوت نما کی قطار میں 1'5 جمع کرنے پر ہمیں 2 ملتا ہے جو اگلی قطار 2 میں قوت نما 2 کیلئے ہے۔ 1، 2 اور 2 کے جمع کرنے پر 1 قطار میں 2 قوت نما کیلئے 3 دیتا ہے اور 3 قطار میں قوت نما 3 کیلئے اور اس کے آگے ساتھ ہی 1 قطار کے شروع اور آخیر میں موجود ہے۔ یہ جب تک جاری رہ سکتا ہے جب تک ہمارا پسندیدہ قوت نما نہ آ جائے۔

ہم یہ نمونہ آگے بڑھاتے ہیں کچھ اور قطاریں لکھ کر، اس مشاہدہ کا استعمال کر کے جیسا کہ شکل 8.2 میں دکھایا گیا ہے۔

Index	Coefficients
0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1

شکل 8.2

پاسکل کا مثلث

شکل 8.2 میں دی گئی ساخت ایک مثلث جیسی لگتی ہے ساتھ ہی '1' اس کے top پر اور 2 ترچھے سے نیچے کی طرف آتے ہوئے۔ یہ اعداد کی صف بندی پاسکل کا مثلث (pascals triangle) کہلاتا ہے، فرانسیسی ریاضی داں بلائیس پاسکل (Blaise Pascal) کے نام کے بعد اسے Meru Prastara بھی کہتے ہیں جو Pingla نے کہا تھا۔

دو رکنیوں کا پھیلاؤ زیادہ طاقتوں کیلئے 'Pascals triangle' سے بھی ممکن ہے۔ ہمیں $(2x+3y)^5$ کو پاسکل کا مثلث استعمال کرکے واضح کرنا چاہیئے۔ 5 قوت نما کیلئے قطار ہے

1 5 10 10 5 1

اس قطار اور اپنے شاہدوں کا استعمال کرکے ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(2x+3y)^5$$

$$= (2x)^5 + 5(2x)^4\ (3y) + 10(2x)^3\ (3y)^2 + 10\,(2x)^2\,(3y)^3 + 5(2x)(3y)^4 + (3y)^5$$

$$= 32x^5 + 240x^4y + 720x^3y^2 + 1080x^2y^3 + 810xy^4 + 243y^5$$

اب اگر ہم $(2x+3y)^{12}$ کا پھیلاؤ معلوم کرنا چاہتے ہیں، تو ہمیں پہلے 12 قوت نما کیلئے قطار معلوم کرنی ہوگی۔ یہ تھوڑا لمبا طریقہ ہے، یہ طریقہ جیسا کہ آپ دیکھ رہے ہیں، اور مشکل ہو جائے گا، اگر ہمیں اور زیادہ طاقت والی terms کو کھولنا ہوگا۔

اب ہم ایک ایسا اصول معلوم کرنے کی کوشش کرتے ہیں جس سے دو رکنیوں کا پھیلاؤ کسی بھی طاقت کیلئے بغیر پوری پاسکل کے مثلث کی قطاریں لکھے اور مطلوبہ قوت نما کی قطار سے پہلے حل کر سکے۔

اس کے لئے ہم پہلے پڑھے اجتماع کی سوچ کا استعمال کریں گے، پاسکل کے مثلث میں دوبارہ اعداد لکھنے کیلئے، ہم جانتے ہیں کہ $^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ ، $0 \le r \le n$ اور n ایک غیر منفی صحیح عدد ہے۔ ساتھ ہی $^n\mathrm{C}_o = 1 = {}^n\mathrm{C}_n$

پاسکل کا مثلث اب اس طرح لکھا جاسکتا ہے جیسا کہ شکل 8.3

Index	Coefficients
0	$^0C_0$ (=1)
1	$^1C_0$ (=1) $^1C_1$ (=1)
2	$^2C_0$ (=1) $^2C_1$ (=2) $^2C_2$ (=1)
3	$^3C_0$ (=1) $^3C_1$ (=3) $^3C_2$ (=3) $^3C_3$ (=1)
4	$^4C_0$ (=1) $^4C_1$ (=4) $^4C_2$ (=6) $^4C_3$ (=4) $^4C_4$ (=1)
5	$^5C_0$ (=1) $^5C_1$ (=5) $^5C_2$ (=10) $^5C_3$ (=10) $^5C_4$ (=5) $^5C_5$ (=1)

شکل 8.3

اس نمونے کو دیکھنے کے بعد ہم پاسکل کی مثلث کی قطاریں کسی بھی قوت نما کیلئے بغیر پچھلی قطاریں دیکھے لکھ سکتے ہیں۔ مثال کے طور پر قوت نما 7 کیلئے قطاریں یہ ہوں گی

$$^7\mathrm{C}_0 \quad ^7\mathrm{C}_1 \quad ^7\mathrm{C}_2 \quad ^7\mathrm{C}_3 \quad ^7\mathrm{C}_4 \quad ^7\mathrm{C}_5 \quad ^7\mathrm{C}_6 \quad ^7\mathrm{C}_7$$

اس لئے اس قطار کا استعمال کر کے اور (i)، (ii) اور (iii) کی سوچ سے ہمارے پاس ہے:

$$(a+b)^7$$

$$= {}^7\mathrm{C}_0a^7 + 7\mathrm{C}_1a^6b + {}^7\mathrm{C}_2a^5b^2 + {}^7\mathrm{C}_3a^4b^3 + {}^7\mathrm{C}_4a^3b^4 + {}^7\mathrm{C}_5a^2b^5 + {}^7\mathrm{C}_6ab^6 + {}^7\mathrm{C}_7b^7$$

دورکنی کا کسی بھی صحیح قوت نما مان لیجئے n کیلئے پھیلاؤ کو ان سوچ (خیال) (Observation) کا استعمال کر کے دیکھا جاسکتا ہے۔

اب ہم اس حالت میں ہیں کہ دورکنی کا کسی بھی صحیح قوت نما کیلئے پھیلاؤ لکھ سکتے ہیں۔

8.2.1 دورکنی مسئلہ کسی بھی مثبت صحیح عدد n کیلئے (Binomial Theorem for any positive integer)

$$(a+b)^n = {}^n\mathrm{C}_0a^n + {}^n\mathrm{C}_1a^{n-1}b + {}^n\mathrm{C}_2a^{n-2} + \ldots + {}^n\mathrm{C}_{n-1}a.b^{n-1} + {}^n\mathrm{C}_nb^n$$

ثبوت ریاضی کا امالہ کا اصول استعمال کر کے ثبوت حاصل کیا گیا ہے۔

مان لیا دیا ہوا بیان ہے۔

$$P(n):(a+b)^n = {}^nC_0a^n + {}^nC_1a^{n-1}b + {}^nC_2a^{n-2}b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1}a.b^{n-1} + {}^nC_nb^n$$

$n=1$ کے لیے ہمارے پاس ہے۔

$$P(1):(a+b)^1 = {}^1C_0a^1 + {}^1C_1b^1 = a+b$$

اس لئے $P(1)$ درست ہے۔

مان لیجئے **P (k)** کسی مثبت صحیح عدد k کیلئے صحیح ہے, (اس کا مطلب)

$$(a+b)^k = {}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + \ldots + {}^kC_kb^k \qquad (1)\ldots$$

ہم یہ ثابت کریں گے کہ P(k+1) بھی صحیح ہے، (اس کا مطلب)

$$(a+b)^{k+1} = {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_{k+1}b^{k+1}$$

اب $(a+b)^{k+1} = (a+b)(a+b)^k$

$$= (a+b)({}^kC_0a^k + {}^kC_1a^{k-1}b + {}^kC_2a^{k-2}b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}ab^{k-1} + {}^kC_kb^k) \quad [(1) \text{ سے}]$$

$$= {}^kC_0a^{k+1} + {}^kC_1a^kb + {}^kC_2a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^kC_{k-1}a^2b^{k-1} + {}^kC_kab^k + {}^kC_0a^kb$$

$$+ {}^kC_1a^{k-1}b^2 + {}^kC_2a^{k-2}b^3 + \ldots + {}^kC_{k-1}ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$

(حقیقی ضرب سے)

$$= {}^kC_0a^{k+1} + ({}^kC_1 + {}^kC_0)a^kb + ({}^kC_2 + {}^kC_1)a^{k-1}b^2 + \ldots$$

$$+({}^kC_k + {}^kC_{k-1})ab^k + {}^kC_kb^{k+1}$$ (ایک جیسے ارکان کو ساتھ ملانے پر)

$$= {}^{k+1}C_0a^{k+1} + {}^{k+1}C_1a^kb + {}^{k+1}C_2a^{k-1}b^2 + \ldots + {}^{k+1}C_kab^k + {}^{k+1}C_{k+1}b^{k+1}$$

$^{k+1}C_0 = 1$ ، $^kC_r + {}^kC_{r-1} = {}^{k+1}C_r$ اور $\left({}^kC_k = 1 = {}^{k+1}C_{k+1}\right)$ کا استعمال کرنے پر

اس لئے، یہ ثابت ہو چکا ہے $P(k+1)$ کیلئے بھی درست ہے جب بھی $P(k)$ کیلئے درست ہے۔اس لئے ریاضی کے امالہ کے اصول سے $P(n)$ درست ہے تمام مثبت صحیح اعداد n کیلئے۔

ہم یہ مسئلہ $(x+2)^6$ واضح کر کے سمجھاتے ہیں۔

$$(x+2)^6 = {}^6C_0x^6 + {}^6C_1x^5.2 + {}^6C_2x^4 2^2 + {}^6C_3x^3.2 + {}^6C_4x^2.2^4 + {}^6C_5x.2^5 + {}^6C_6.2^6$$

$$= x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$$

اس لیے $(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64$

مشاہدات Observations

.1 علامتی اظہار $\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \; a^{n-k}b^k$ کو ظاہر کرتا ہے

${}^nC_0a^nb^0 + {}^nC_1a^{n-1}b^1 + ... + {}^nC_ra^{n-r}b^r + ... + {}^nC_na^{n-n}b^n$، جبکہ $b^0 = 1 = a^{n-n}$

اس طرح مسئلہ کو اس طرح بھی بیان کیا جاسکتا ہے $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} {}^nC_k \; a^{n-k}b^k$

.2 ضریب ${}^nC_r$ جو دورکنی مسئلہ میں واقع ہو رہا ہے دورکنی ضریب کہلاتا ہے۔

.3 $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں $(n+1)$ ارکان ہیں اس کا مطلب قوت نما ایک سے زیادہ۔

.4 ارکان کے لگاتار پھیلاؤ میں a کے قوت نما میں '1' کی کمی (گھٹ جانا) ہوتی جاتی ہیں۔ اگر یہ پہلے رکن میں n ہے تو دوسرے رکن میں $(n-1)$ ہوگا اور اس طرح آخری رکن میں '0' ہوگا، اسی وقت 'b' کا قوت نما '1' سے بڑھتا جاتا ہے جو کہ پہلے رکن میں '0' ہے، دوسرے رکن میں '1' اور اسطرح آخری رکن میں n ہوگا۔

.5 $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں a اور b کی قوت نماؤں کا جوڑ $n+0=n$ ہے پہلے رکن میں، $(n-1)+1=n$ دوسرے رکن میں اور اسی طرح $0+n=n$ آخری رکن میں، اس طرح، یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ قوت نماؤں a اور b کا جوڑ ہر رکن کے پھیلاؤ میں n ہے۔

8.2.2 کچھ خاص صورت حال (Some special cases)

$(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں،

(i) $a = x$ اور $b = -y$ لینے پر ہمیں ملتا ہے

$$(x-y)^n = [x+(-y)]^n$$

$$= {}^nC_0x^n + {}^nC_1x^{n-1}(-y) + {}^nC_2x^{n-2}(-y)^2 + {}^nC_3x^{n-3}(-y)^3 + ... + {}^nC_nx(-y)^n$$

$$= {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 - {}^nC_3x^{n-3}y^3 + ... + (-1)^n\ {}^nC_ny^n$$

اس لئے $(x-y)^n = {}^nC_0x^n - {}^nC_1x^{n-1}y + {}^nC_2x^{n-2}y^2 + ... + (-1)^n\ {}^nC_ny^n$

اس کا استعمال کرکے، ہمارے پاس ہے

$$(x-2y)^5 = {}^5C_0x^5 - {}^5C_1x^4(2y) + {}^5C_2x^3(2y)^2 - {}^5C_3x^2(2y)^3 + {}^5C_4x(2y)^4 - {}^5C_5(2y)^5$$

$$= x^5 - 10x^4y + 40x^3y^2 - 80x^2y^3 + 80xy^4 - 32y^5$$

(ii) $a=1$ ، $b=x$ لینے پر، ہمیں ملتا ہے

$$(1+x)^n = {}^nC_0(1)^n + {}^nC_1(1)^{n-1}x + {}^nC_2(1)^{n-2}x^2 + ... + {}^nC_nx^n$$

$$= {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$$

اس لیے $(1+x)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + ... + {}^nC_nx^n$

خاص طور پر، $x=1$ کے لیے ہمارے پاس ہے

$$2^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + ... + {}^nC_n$$

(iii) $a=1$ ، $b=-x$ لینے پر، ہمیں ملتا ہے

$$(1-x)^n = {}^nC_0 - {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 - ... + (-1)^n\ {}^nC_nx^n$$

خاص طور پر، $x=1$ کے لیے ہمارے پاس ہے

$$0 = {}^nC_0 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - ... + (-1)^n\ {}^nC_n$$

مثال 1 $\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4$ کو پھیلاؤ کی شکل میں لکھئے جہاں $x \neq 0$ ہو

حل دورکنی مسئلہ کا استعمال کرنے پر، ہمارے پاس ہے۔

$$\left(x^2 + \frac{3}{x}\right)^4 = {}^4C_0(x^2)^4 + {}^4C_1(x^2)^3\left(\frac{3}{x}\right) +$$

$$ {}^4C_2(x^2)^2\left(\frac{3}{x}\right)^2 + {}^4C_3(x^2)\left(\frac{3}{x}\right)^3 + {}^4C_4\left(\frac{3}{x}\right)^4 $$

$$ = x^8 + 4x^6.\frac{3}{x} + 6.x^4.\frac{9}{x^2} + 4.x^2.\frac{27}{x^3} + \frac{81}{x^4} $$

$$ = x^8 + 12x^5 + 54x^2 + \frac{108}{x} + \frac{81}{x^4} $$

مثال 2 $(98)^5$ کی قیمت معلوم کیجئے

حل ہم 98 کو دو نمبروں کے جوڑ یا فرق میں ظاہر کرتے ہیں جن کی طاقتوں کی قیمت معلوم کرنا آسان ہے اور اس کے بعد دو رکنی مسئلہ کا استعمال کریں۔

$98 = 100 - 2$ کے برابر لکھئے۔

اس لئے $(98)^5 = (100-2)^5$

$$ = {}^5C_0(100)^5 - {}^5C_1(100)^4.2 + {}^5C_2(100)^3 2^2 $$

$$ - {}^5C_3(100)^2(2)^3 + {}^5C_4(100)(2)^4 - {}^5C_5(2)^5 $$

$$ = 10000000000 - 5\times100000000\times2 + 10\times1000000 $$

$$ \times4 - 10\times10000\times8 + 5\times100\times16 - 32 $$

$$ = 10040008000 - 1000800032 = 9039207968 $$

مثال 3 $(1.01)^{1000000}$ یا 10,000 میں کون بڑا ہے۔

حل 1.01 کو توڑنے اور دو رکنی مسئلہ کا استعمال کرنے پر پہلے کچھ رکن لکھنے پر ہمارے پاس ہے

$$ (1.01)^{1000000} = (1+0.01)^{1000000} $$

$= {}^{1000000}C_0 + {}^{1000000}C_1(0.01) +$ دوسرے مثبت رکن

$= 1 + 1000000\times0.01 +$ دوسرے مثبت رکن

$= 1 + 10000 +$ دوسرے مثبت رکن

$$>10000$$

اس لئے $\qquad (1.01)^{1000000} > 10000$

مثال 4 دو رکنی مسئلہ کا استعمال کر کے، ثابت کیجئے کہ $6^n - 5n$ کو 25 سے تقسیم کرنے پر ہمیشہ 1 بچتا ہے۔

حل a اور b دو اعداد کیلئے اگر ہم دو اعداد r اور q معلوم کر سکیں تا کہ $a = bq + r$ تب ہم کہتے ہیں کہ b 'a کو q کیساتھ تقسیم کرتا ہے اور r باقی ہے اس طرح یہ دیکھانے کیلئے کہ جب $6^n - 5n$ کو 25 تقسیم کرتا ہے اور '1' باقی بچتا ہے، ہم ثابت کرتے ہیں $6^n - 5n = 25k + 1$ جہاں k کوئی طبعی اعداد ہے۔

ہمارے پاس ہے

$$(1+a)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 a + {}^nC_2 a^2 + \ldots + {}^nC_0 a^n$$

$a = 5$ کیلئے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$(1+5)^n = {}^nC_0 + {}^nC_1 5 + {}^nC_2 5^2 + \ldots + {}^nC_0 5^n$$

یعنی $(6)^n = 1 + 5n + 5^2.{}^n\mathrm{C}_2 + 5^3.{}^n\mathrm{C}_3 + \ldots + 5^n$

یعنی $6^n - 5n = 1 + 5^2({}^n\mathrm{C}_2 + {}^n\mathrm{C}_3 5 + \ldots + 5^{n-2})$

یا $6^n - 5n = 1 + 25({}^n\mathrm{C}_2 + 5.{}^n\mathrm{C}_3 + \ldots + 5^{n-2})$

یا $6^{nor} \qquad {}^{6^n - 5n = 25k+1} - 5n = 1 + 25({}^n\mathrm{C}_2 + 5.{}^n\mathrm{C}_3 + \ldots + 5^{n-2})$

جہاں $k = {}^n\mathrm{C}_2 + 5.{}^n\mathrm{C}_3 + \ldots + 5^{n-2}$

یہ دکھاتا ہے کہ جب $6^n - 5n$ کو 25 سے تقسیم کیا جاتا ہے تو 1 باقی رہتا ہے۔

مشق 8.1

مشق میں دی گئی 1 تا 5 عبارتوں کو پھیلاؤ کی شکل میں لکھئے

.1 $(1-2x)^5$ **.2** $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$ **.3** $(2x-3)^6$

.4 $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$ **.5** $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$

دورکنی مسئلہ کا استعمال کر کے ذیل میں ہر ایک کی قیمت معلوم کیجیے۔

.6 $(96)^3$ .7 $(102)^5$ .8 $(101)^4$

.9 $(99)^5$

.10 دورکنی مسئلہ کا استعمال کر کے بتائیے (دکھائیے) کہ کون سا عدد $(1.1)^{10000}$ یا 1000 بڑا ہے۔

.11 $(a+b)^4-(a-b)^4$ معلوم کیجیے۔ اس طرح $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^4-(\sqrt{3}-\sqrt{2})^4$ کی قیمت معلوم کیجیے۔

.12 $(x+1)^6+(x-1)^6$ معلوم کیجیے۔اس طرح یا دوسرے طریقے سے $(\sqrt{2}+1)^6+(\sqrt{2}-1)^6$ کی قیمت کا اندازہ لگائیے۔

.13 ثابت کیجیے کہ $9^{n+1}-8n-9$ تقسیم ہوتا ہے 64 سے، جبکہ n ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

.14 ثابت کیجیے کہ $\sum_{r=0}^{n} 3^r \ {}^nC_r = 4^n$

8.3 عام اور درمیانی ارکان (General and Middle Terms)

.1 $(a+b)^n$ کیلئے دورکنی پھیلاؤ میں ہم دیکھتے ہیں کہ پہلا رکن ${}^nC_0a^n$ ہے، دوسرا رکن ${}^nC_1a^{n-1}b$ ہے، تیسرا رکن ${}^nC_2a^{n-2}b^2$ ہے اور اسی طرح آگے ہے، ان ارکان کے لگاتار نمونے کو دیکھتے ہوئے ہم کہہ سکتے ہیں کہ $(r+1)^{th}$ رکن ${}^nC_ra^{n-r}b^r$ ہے۔ $(r+1)^{th}$ رکن $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں عام رکن کہلاتا ہے۔ یہ T_{r+1} سے دکھایا جاتا ہے۔اس طرح $T_{r+1}={}^nC_ra^{n-r}b^r$

.2 درمیانی رکن کے مطابق $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں، ہمارے پاس ہے۔

(i) اگر n جفت ہے، تب پھیلاؤ میں ارکان کی تعداد $n+1$ ہوگی۔ جیسے n جفت ہے پس $n+1$ طاق ہے۔ اسلئے، درمیانی رکن $\left(\frac{n+1+1}{2}\right)^{th}$ رکن یعنی $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$

مثال کے طور پر $(x+2y)^8$ کے پھیلاؤ میں، درمیانی رکن $\left(\frac{8}{2}+1\right)^{th}$ ہے، یعنی 5^{th} رکن

(ii) اگر n طاق ہے تب $n+1$ جفت ہے، اس طرح پھیلاؤ میں دو درمیانی ارکان ہوں گے $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ رکن اور

رکن، اس طرح $(2x-y)^7$ کے پھیلاؤ میں، درمیانی ارکان ہیں $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^{th}$ چوتھے اور $\left(\frac{7+1}{2}\right)^{th}$

یعنی پانچویں رکن۔ $\left(\frac{7+1}{2}+1\right)^{th}$

.3 $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{2n}$ جہاں $x \neq 0$ کے پھیلاؤ میں درمیانی رکن $\left(\frac{2n+1+1}{2}\right)^{th}$ ہے

یعنی $(n+1)^{th}$ رکن، کیونکہ $2n$ مثبت ہے۔

یہ $^{2n}C_n x^n \left(\frac{1}{x}\right)^n = {}^{2n}C_n$ (مستقل) سے دیا گیا ہے۔

یہ رکن x سے آزاد رکن کہلاتا ہے یا مستقل رکن۔

مثال 5 a معلوم کیجئے اگر 17 ویں اور 18 ویں ارکان $(2+a)^{50}$ کے پھیلاؤ میں برابر ہوں۔

حل $(x+y)^n$ کے پھیلاؤ میں $(r+1)^{th}$ رکن $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r} y^r$ سے دیا گیا ہے۔

17 ویں رکن کے لئے، ہمارے پاس ہے $r+1=17$ بعد $r=16$

اس لئے
$$T_{17} = T_{16+1} = {}^{50}C_{16}(2)^{50-16}a^{16}$$
$$= {}^{50}C_{16}2^{34}a^{16}$$

اسی طرح
$$T_{18} = {}^{50}C_{17}2^{33}a^{17}$$

دیا ہوا ہے کہ
$$T_{17} = T_{18}$$

اس طرح
$${}^{50}C_{16}(2)^{34}a^{16} = {}^{50}C_{17}(2)^{33}a^{17}$$

اس لئے
$$\frac{{}^{50}C_{16}.2^{34}}{{}^{50}C_{17}.2^{33}} = \frac{a^{17}}{a^{16}}$$

یعنی
$$a = \frac{{}^{50}C_{16}\times 2}{{}^{50}C_{17}} = \frac{50!}{16!34!}\times\frac{17!.33!}{50!}\times 2 = 1$$

مثال 6 دکھایئے کہ درمیانی رکن $(1+x)^{2n}$ کے پھیلاؤ میں $\frac{1.3.5...(2n-1)}{n!}2n\,x^n$ ہے جہاں n ایک مثبت صحیح

عدد ہے۔

حل جیسے $2n$ جفت ہے، $(1+x)^{2n}$ کے پھیلاؤ میں درمیانی رکن $\left(\frac{2n}{2}+1\right)^{th}$ ہے،یعنی $(n+1)^{th}$ رکن جوکہ دیا گیا ہے،

$$T_{n+1} = {}^{2n}C_n (1)^{2n-n} (x)^n = {}^{2n}C_n x^n = \frac{(2n)!}{n!\,n!} x^n$$

$$= \frac{2n(2n-1)\ (2n-2)\ ...4.3.2.1}{n!\,n!} x^n$$

$$= \frac{1.2.3.4...(2n-2)(2n-1)(2n)}{n!\,n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)][2.4.6...(2n)]}{n!\,n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]2^n[1.2.3...n]}{n!\,n!} x^n$$

$$= \frac{[1.3.5...(2n-1)]n!}{n!\,n!} 2^n.x^n$$

$$= \frac{1.3.5...(2n-1)}{n!} 2^n\, x^n$$

مثال 7 $(x+2y)^9$ کے پھیلاؤ میں x^6y^3 کا ضریب معلوم کیجیے۔

حل مان لیجیے x^6y^3، $(x+2y)^9$ کے پھیلاؤ میں $(r+1)^{th}$ رکن میں واقع ہوتا ہے۔

اب $T_{r+1} = {}^9C_r x^{9-r} (2y)^r = {}^9C_r 2^r .x^{9-r} .y^r$

x^6y^3 میں x اور y کے قوت نماؤں کا مقابلہ کرنے پر اور T_{r+1} میں، ہمیں حاصل ہوتا ہے $r = 3$

اس طرح، x^6y^3 کا ضریب ہے

$${}^9C_3 2^3 = \frac{9!}{3!6!}.2^3 = \frac{9.8.7}{3.2}.2^3 = 672$$

مثال 8 $(x+a)^n$ کے دورکنی پھیلاؤ میں دوسرے، تیسرے اور چوتھے ارکان بالترتیب 240، 720 اور 1080 ہیں۔ x، a اور n معلوم کیجئے۔

حل دیا ہوا ہے کہ دوسرا رکن

ہمارے پاس ہے $$T_2 = {}^nC_1 x^{n-1}.a \qquad (1)...$$

اس طرح $${}^nC_1 x^{n-1}.a = 240 \qquad (2)...$$

اسی طرح $${}^nC_2 x^{n-2}.a^2 = 720 \qquad (3)...$$

اور $${}^nC_3 x^{n-3}.a^3 = 1080$$

(2) کو (1) سے تقسیم کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے،

$$\frac{{}^nC_2 x^{n-2} a^2}{{}^nC_1 x^{n-1} a} = \frac{720}{240} \quad i.e., \quad \frac{(n-1)!}{(n-1)!} \cdot \frac{a}{x} = 6$$

یا $$\frac{a}{x} = \frac{6}{(n-1)} \qquad (4)....$$

(3) کو (2) سے تقسیم کرنے پر ہمارے پاس آتا ہے۔

$$\frac{a}{x} = \frac{6}{2(n-2)} \qquad (5)....$$

(4) اور (5) سے $\dfrac{6}{n-1} = \dfrac{9}{2(n-2)}$ اس طرح $n=5$

اس طرح (1) سے $5x^4 = 240$ اور (4) سے $\dfrac{a}{x} = \dfrac{3}{2}$

ان مساوات کو a اور x کیلئے حل کرنے پر ہمیں x=2 اور a=3 حاصل ہوتا ہے۔

مثال 9 $(1+a)^n$ کے پھیلاؤ میں تین لگاتار ارکان کے ضریب نسبت میں 1:7:42 ہے۔ n معلوم کیجئے۔

حل مان لیجئے $(1+a)^n$ کے پھیلاؤ میں تین لگاتار ارکان $(r-1)^{th}$، r^{th} اور $(r+1)^{th}$ ہیں۔ $(r-1)^{th}$ رکن ${}^nC_{r-2}a^{r-2}$ ہے اور اس کا ضریب ${}^nC_{r-2}$ ہے۔ اسی طرح r^{th} اور $(r+1)^{th}$ کے ارکان کے ضریب ${}^nC_{r-1}$ اور ${}^nC_r$ ہیں۔

کیونکہ ضریب 42:7:1 میں ہیں، اس طرح ہمارے پاس ہے

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{7} \quad \text{یعنی} \quad n - 7r + 9 = 0 \quad \ldots(1)$$

اور

$$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_{r}} = \frac{7}{42} \quad \text{یعنی} \quad n - 7r + 1 = 0 \quad \ldots(2)$$

مساوات (1) اور (2) کو حل کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے، n=55

مشق 8.2

ان کے ضریب معلوم کیجئے۔

.1 $x^5 \; in (x+3)^8$

.2 $a^5b^7 \; in (a-2b)^{12}$

ذیل کے پھیلاؤ میں عام رکن معلوم کرو۔

.3 $(x^2-y)^6$

.4 $(x^2-yx)^{12}, x \neq 0$

.5 $(x-2y)^{12}$ کے پھیلاؤ میں 4^{th} رکن معلوم کرو۔

.6 $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}, x \neq 0$ کے پھیلاؤ میں 13^{th} واں رکن معلوم کیجئے

ذیل کے پھیلاؤ میں درمیانی ارکان معلوم کیجئے۔

.7 $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$

.8 $\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$

.9 $(1+a)^{m+n}$ کے پھیلاؤ میں ثابت کیجئے کہ a^m اور a^n کے ضریب برابر ہیں۔

.10 $(x+a)^n$ کے پھیلاؤ میں $(r-1)^{th}$، r^{th} اور $(r+1)^{th}$ ارکان کے ضریب 5:3:1 نسبت میں ہیں۔ n اور r معلوم کیجئے۔

.11 ثابت کیجئے کہ $(a+x)^{2n}$ کے پھیلاؤ میں x^n کا ضریب $(1+x)^{2n-1}$ کے پھیلاؤ میں x^n کے ضریب کا دوگنا ہے۔

.12 m کی ایک مثبت قدر معلوم کیجیے جس کے لئے $(1+x)^m$ کے پھیلاؤ میں x^2 کا ضریب 6 ہے۔

متفرق مثالیں

مثال 10 $\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{3x}\right)^6$ کے پھیلاؤ میں وہ رکن معلوم کیجیے جو x سے آزاد ہو۔

حل ہمارے پاس ہے $T_{r+1} = {}^6C_r\left(\frac{3}{2}x^2\right)^{6-r}\left(-\frac{1}{3x}\right)^r$

$$= {}^6C_r\left(\frac{3}{2}\right)^{6-r}\left(x^2\right)^{6-r}(-1)^r\left(\frac{1}{x}\right)^r\left(\frac{1}{3^r}\right)$$

$$= (-1)^r\, {}^6C_r\frac{(3)^{6-2r}}{(2)^{6-r}}x^{12-3r}$$

رکن x سے آزاد ہوگا اگر x کا قوت نما صفر ہو یعنی 12-3r=0 اس طرح r=4، اس لئے 5 واں ارکان x سے آزاد ہے اور دیا گیا ہے

$$(-1)^4\, {}^6C_r\frac{(3)^{6-8}}{(2)^{6-4}}=\frac{5}{12}$$

مثال 11 اگر a^{r-1} اور a^r کے ضریب $(1+a)^n$ کے پھیلاؤ میں حسابی تصاعد (Arithmetic Progression) میں ہیں تو ثابت کیجیے کہ $n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0$

حل پھیلاؤ میں $(r+1)^{th}$ رکن ${}^nC_r a^r$ ہے۔ اس طرح یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ a^r، $(r+1)^{th}$ رکن میں واقع ہوتا ہے اور اس کا ضریب ${}^nC_r$ ہے اس لئے a^{r-1}، a^r اور a^{r+1} کے ضریب موجود ہے ${}^nC_{r-1}$ اور ${}^nC_{r+1}$ ہیں، کیونکہ ایک ضریب حسابی تصاعد میں ہیں اس طرح ہمارے پاس ہے ${}^nC_{r-1}+{}^nC_{r+1}=2.{}^nC_r$

یہ دیتا ہے $$\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}=\frac{n!}{(r+1)!(n-r-1)!}=2\times\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

یعنی $$\frac{1}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)(n-r-1)!}+\frac{1}{(r+1)(r)(r-1)!(n-r-1)!}$$

$$=2\times\frac{1}{r(r-1)!(n-r)(n-r-1)!}$$

یا
$$\frac{1}{(r-1)(n-r-1)!}\left[\frac{1}{(n-r)(n-r+1)}+\frac{1}{(r+1)(r}\right]$$

$$=2\times\frac{1}{(r-1)!(n-r-1)!\left[r(n-r)\right]}$$

یعنی
$$\frac{1}{(n-r+1)(n-r)}+\frac{1}{r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$$

یا
$$\frac{r(r+1)+(n-r)(n-r+1)}{(n-r)(n-r+1)r(r+1)}=\frac{2}{r(n-r)}$$

یا
$$r(r+1)+(n-r)(n-r+1)=2(r+1)(n-r+1)$$

یا
$$r^2+r+n^2-nr+n-nr+r^2-r=2(nr-r^2+r+n-r+1)$$

یا
$$n^2-4nr-n+4r^2-2=0$$

یعنی
$$n^2-n(4r+1)+4r^2-2=0$$

مثال 12 ثابت کیجئے کہ $(1+n)^{2n}$ کے پھیلاؤ میں درمیانی رکن کا ضریب $(1+n)^{2n-1}$ کے پھیلاؤ کے دو درمیانی ارکان کے ضریب کے جوڑ کے برابر ہے۔

حل جیسا کہ 2n جفت ہے اس طرح۔ $(1+x)^{2n}$ کے پھیلاؤ میں صرف ایک درمیانی رکن ہے جو کہ $\left\{\frac{(2nx)}{2}+1\right\}^{th}$ ہے یعنی $(n+1)^{th}$ رکن $(n+1)\text{th}$ رکن. ${}^{2n}C_nX^N$ ہے x^n کا ضریب 2^nC_n ہے۔ اسی طرح کیونکہ (2n-1) طاق ہے۔

دوسرے پھیلاؤ میں دو ارکان موجود ہیں $\left\{\frac{(2n-1)+1}{2}\right\}^{th}$ رکن اور $\left\{\frac{(2n-1)+1}{2}+1\right\}^{th}$

ان ارکان کے ضریب n^{th} اور $(n+1)^{th}$ ہیں

اس طرح ${}^{2n-1}C_{n-1}$ اور ${}^{2n-1}C_{n,}$

اب $${}^{2n-1}C_{n-1}+{}^{2n-1}C_n={}^{2n}C_n$$

$\left[{}^{n}C_{r-1} + {}^{n}C_{r} = {}^{n+1}C_{r},\right]$ جو کہ مطلوب ہے

مثال 13 $(1+2a)^4(2-a)^5$ کے پھیلاؤ میں a^4 کا ضریب معلوم کیجئے۔

حل ہم پہلے دیئے ہوئے حاصل ضرب کے ہر ٹکڑے کو دورکنی مسئلہ کا استعمال کر کے پھیلاؤ کی شکل میں لکھیں۔

$$(1+2a)^4 = {}^4C_o + {}^4C_1(2a) + {}^4C_2(2a)^2 + {}^4C_4(2a)^4$$

$$= 1+4(2a)+6(4a^2)+4(8a^3)+16^4.$$

$$=1+8a+24a^2+32a^3 16a4$$

$$(2\text{-}a)^5 = {}^5C_0(2)^5 - {}^5C_1(2)4(a) + {}^5C_2(2a)3(a)^2 - {}^5C_3(2)^2(a)^3$$

$$+{}^5C_4(2)(a)^4 - {}^5C_5(a)^5$$

$$= 32-80a+80a^2-40a^3+10a^4-a^5$$

اس طرح $((1+2a)^4(2-a)^5)$

$$=\left(1+8a+24a^2+32a^3+16a^4\right)\left(32-80a+80a^2-40a^3+10a^4-a^5\right)$$

دونوں بریکٹوں کی مکمل ضرب کرنے کی ضرورت نہیں ہے۔ہم صرف ان ارکان کو لکھتے ہیں جن میں a^4 شامل ہے، یہ اس وقت ہوسکتا ہے جب ہم یہ $a^r.a^{4-r} = a^4$. نوٹ کر لیں جن ارکان میں a^4 شامل ہے وہ یہ ہیں۔

$$1\left(10a^4\right)+(8a)(-40)a^3+\left(24a^2\right)\left(80a^2\right)+32a^3(-80a)+\left(16a^4\right)(32)=-438a^4$$

اس a^4 کا ضریب دیئے ہوئے حاصل ضرب میں 438ہے۔

مثال 14 $(n+a)^n$ کے سرے سے r^{th} رکن معلوم کیجئے۔

حل $(x+a)^n$ کے پھیلاؤ میں n+1 ارکان ہیں۔ارکان کا مشاہدہ کر کے ہم یہ کہہ سکتے ہیں کہ سرے سے پہلا رکن آخری رکن ہے یعنی پھیلاؤ میں $(n+1)^{th}$ رکن اور $(n+1)=(n+1)-(1-1)$ سرے سے دوسرا رکن پھیلاؤ کی n^{th} رکن ہے، اور $n=(n+1)-(2-1)$- سرے سے تیسرا رکن پھیلاؤ کی $(n\text{-}1)^{th}$ رکن ہے اور $(n\text{-}1)=(n+1)-(3-1)$ اور اسی طرح آگے بھی۔اس طرح سرے سے r^{th} رکن $(n+1)\text{-}(r\text{-}1)=(n\text{-}r+2)$ کے

پھیلاؤ کی رکنی عدد ہوگی۔ اور $(\text{n-r+2})^{\text{th}}$ رکن $= {}^{n}c_a - r + 1^{x^{r-1}} a^{n-r+1}$ ہے۔

مثال 15، $n > 0$، $(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{2\sqrt[3]{x}})^{18}$ کے پھیلاؤ میں x سے آزاد رکن معلوم کیجیے۔

حل ہمارے پاس ہے $T_{r+1} = {}^{18}C_r \left(\sqrt[3]{x}\right)^{18-r} \left(2\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^{r}$

$$= {}^{18}C_r x^{\frac{18-r}{3}} \frac{1}{2^r . x^{\frac{r}{3}}} = {}^{18}C_2 \frac{1}{2^{r.}} x^{\frac{18-2r}{3}}$$

کیونکہ ہمیں وہ رکن معلوم کرنا ہے جو x سے آزاد ہو، اس کا مطلب وہ رکن جس میں x نہیں ہو، اس طرح لیجیے

$\frac{18-2r}{3} = o.$ ہمیں r=9 مطلوبہ رکن ${}^{18}C_9 \frac{1}{2^9}$ ہے

مثال 16 $\left(x - \frac{3}{x^2}\right)^m$ $x \neq 0,$ m ایک طبعی عدد ہے۔ کے پھیلاؤ میں پہلے تین ارکان کے ضریب کا حاصل جمع 559 ہے۔ پھیلاؤ میں وہ رکن معلوم کیجیے جس میں x^3 ہو۔

حل $\left(x - \frac{3}{x2}\right)^m$ کے پھیلاؤ میں پہلے تین ارکان کے ضریب ${}^mCo$ ، $(-3)^m C_1$ اور $9^m c_2$ ہیں۔ اس لئے سوال کے مطابق ${}^mC_o - 3^m C_1 + 9^m C_2 = 559$ یعنی $1 - 3m + 9m\frac{(m-1)}{2} = 559$

جو m=12 دیتا ہے (کیونکہ m طبعی عدد ہے)

اب $T_{r+1} = {}^{12}C_r - r\left(-\frac{3}{x^2}\right)^r = {}^{12}C_r (-3Y.x^{12-3r}$

کیونکہ ہمیں ان رکن کی ضرورت ہے جس میں x^3 ہو اس لئے رکھیے $12 - 3r = 3 i.e. r = 3.$

اس لئے مطلوبہ رکن ${}^{12}C_3 (-3)^3 x^3, i.e. -594\text{o}x^3,$

مثال 17 اگر $(1+x)^{34}$ کے پھیلاؤ میں $(2r-1)^{th}$ اور $(r-5)^{th}$ ارکان کے ضریب برابر ہوں تو r معلوم کیجیے۔

حل $(r-5)^{th}$ کے پھیلاؤ میں $(2r-1)^{th}$ اور $(1+x)^{34}$ ارکان کے ضریب بالترتیب ${}^{34}C_{r-6}$ اور ${}^{34}\text{C}_{2r-2'}$

ہیں کیونکہ وہ برابر ہیں اس طرح $^{34}C_{2r-2} = ^{34}C_{r-6}$

اس لئے یا تو $r-6=2r-2$ یا $r-6=34-(2r-2)$

یہ حقیقت (اصول) استعمال کرنے پر کہ اگر۔۔۔تب یا تو r=p یا r = n = p ہوگا۔

اس طرح ہمیں حاصل ہوتا ہے r = -4 یا r = 14، کیونکہ r ایک طبعی عدد ہے، اس لئے r = 4 ممکن نہیں ہے۔

اس طرح r=14

متفرق مشق

.1 $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ میں a، اور n کی قیمت معلوم کیجئے اگر پھیلاؤ کے پہلے تین ارکان بالترتیب 729، 729 اور 30375 ہوں۔

.2 $(3+ax)^9$ اگر کے پھیلاؤ میں x^2 اور x^3 کے ضریب برابر ہوں تو a کی قیمت معلوم کیجئے۔

.3 $(1+2x)^6(1-x)^7$ کے پھیلاؤ کے حاصل ضرب میں x^5 کا ضریب معلوم کیجئے۔

.4 اگر a اور b مختلف صحیح اعداد ہیں، تو ثابت کیجئے کہ a^n-b^n، کا جزو ضربی ہے جبکہ n ایک مثبت صحیح عدد ہے۔

[اشارہ $a^n=(a-b+)^n$ کو لکھئے اور پھیلاؤ کی شکل میں لکھئے]

.5 $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^6-\left(3-\sqrt{2}\right)^6$ کی قیمت کا اندازہ لگائیے۔

.6 $\left(a^2+\sqrt{a^2-1}+\right)^4+\left(a^2-\sqrt{a_2-1}\right)^4$ کی قیمت معلوم کیجئے۔

.7 $(.99)^5$ کے پھیلاؤ کے پہلے تین ارکان استعمال کرکے اس کی تقریبا قیمت نکالیے۔

.8 n کی قیمت معلوم کیجئے اگر $\left(4\sqrt{2}+4\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^n$ شروع سے پانچویں رکن اور سرے سے پانچویں رکن کی نسبت $6:1^\circ$ کے پھیلاؤ میں ہو۔

.9 $\left(1+\frac{x}{2}-\frac{2}{x}\right)^4, x\neq 0$ کو دورکنی مسئلہ استعمال کرکے پھیلائیے۔

.10 $\left(3x^2-2ax+3a^2\right)^3$ کا پھیلاؤ دورکنی مسئلہ استعمال کرکے کیجئے۔

خلاصہ (Summary)

- دورکنی کا پھیلاؤ کسی بھی مثبت صحیح عدد n کیلئے دورکنی مسئلہ میں دیا گیا ہے۔ جو کہ یہ ہے
$$(a+b)^n = {}^nC_o a_n + {}^nC_1 a\text{-}1b + {}^nC_2 a^n\text{-}{}^2b^2 + \ldots + {}^nC_{n-1} a.b^{n-1} + {}^nC_n b^n.$$
- پھیلاؤ کے ضریب کو ایک خاص ترتیب میں رکھا جاتا ہے اس ترتیب کو (Pascal's Triagle) پاسکل کا مثلث کہا جاتا ہے۔
- $(a+b)^n$ کے پھیلاؤ کی عام رکن $T_{r+1} = {}^nC_r a^{n-r} \cdot b^r$ ہے
- $(a+b)^n$، کی پھیلاؤ میں اگر n جفت ہے تب درمیانی رکن $\left(\frac{n}{2}+1\right)^{th}$ رکن ہوگی اگر n طاق ہے، تب درمیانی ارکان $\left(\frac{n+1}{2}\right)^{th}$ اور $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)^{th}$ ہوں گے۔

تاریخ کے اوراق سے (Historical Note)

قدیم زمانے میں ہندوستانی ریاضی داں $(x+y)$n, $o \le$ n ≤ 7 کے پھیلاؤ میں ضریب کے بارے میں جانتے تھے۔ ان ضریب کو رکھنے کا طریقہ ایک ڈائیگرام کی شکل میں تھا جسے میرو۔ پراستھر (Meru- Prastara) کہتے ہیں۔ جو پنگلا (Pingla) نے اپنی کتاب چھنداشاستر chhanda Shastra میں دیا ہے۔ یہ مثلثی اظہار چینی ریاضی داں چوشی کی Chu- shi- kie (1303AD) کے کام میں بھی پایا جاتا ہے۔ دورکنی ضریب کی ٹرم (رکن) کا سب سے پہلے جرمنی ریاضی داں مائیکل اسٹیبل (1486-1567A.D.) نے تعارف کرایا تھا تقریباً 1544A-D میں بم بیلی Bombelli(1572AD نے بھی $(a+b)n,$ کے پھیلاؤ میں $n = 1,2.....7$ تک کیلئے ضریب دیئے تھے۔ اور اوچرٹیڈ Oughtred 1631AD نے n=1,2,...., 10 تک کیلئے ضریب دیئے تھے۔ حسابی مثلث کا مشہور نام پاسکل کا مثلث Pascal's triangle اور میرو پراستھر Meru prastra جیسا مثلث فرانسیسی ریاضی داں بلس پاسکل 1623-1662AD نے 1665 میں بنایا تھا۔

دورکنی مسئلہ کی موجودہ شکل n کی صحیح قدر Trate du triangle میں ظاہر ہوئی جو کہ پاسکل نے لکھی تھی اور جسے Posthumously 1665AD میں شائع کیا۔