



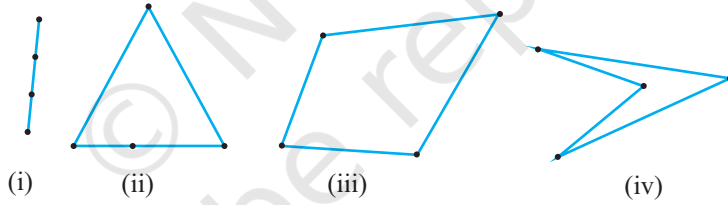
4915CH08

باب 8

چار ضلعی (QUADRILATERALS)

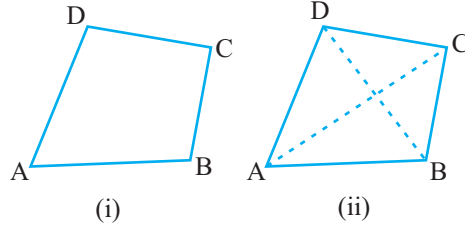
8.1 تعارف (Introduction)

آپ نے باب 6 اور 7 میں مثلث کی بہت سی خصوصیات کے بارے میں پڑھا۔ آپ جانتے ہیں کہ تین غیر ہم نقطوں کو جوڑوں میں ملانے سے جو شکل بنتی ہے وہ مثلث کہلاتی ہے آئیے اب چار نقطے مارک کرتے ہیں اور دیکھتے ہیں کہ ان کو کسی ترتیب میں جوڑوں میں ملانے سے کون سی شکل حاصل ہوتی ہے۔



شکل 8.1

آپ نوٹ کرتے ہیں کہ اگر تمام نقطے ہم خط ہوں ایک ہی خط میں ہوں تو ہمیں ایک قطعہ خط ملتا ہے [شکل 8.1 (i) کو دیکھیے] اگر چار میں سے تین نقطے ہم خط ہوں تو ہمیں ایک مثلث حاصل ہوتا ہے [شکل 8.1 (ii) دیکھیے] اگر چار نقطوں میں سے کوئی بھی تین نقطے ہم خط نہیں ہوں تو ہمیں چار ضلعوں والی ایک بند شکل حاصل ہوتی ہے [شکل 8.1 (iii) اور (iv) دیکھیے]۔ ایسی شکل جو چاروں نقطوں کو ایک ترتیب سے ملانے پر حاصل ہوتی ہے چار ضلعی کہلاتی ہے اس کتاب میں ہم صرف شکل 8.1 (iii) میں دیئے گئے چار ضلعی کے بارے میں غور کریں گے۔ شکل 8.1 (iv) میں دیئے گئے چار ضلعی کے بارے میں نہیں۔ ایک چار ضلعی میں چار (ضلع) چار زاویہ اور چار راس ہوتے ہیں [شکل (i) 8.2 دیکھتے]



شکل 8.2

چار ضلعی ABCD میں AB، BC، CD اور DA چار اضلاع ہیں A، B، C اور D چار راس ہیں اور $\angle A, \angle B, \angle C$ اور $\angle D$ راسوں پر بنے چار زاویہ ہیں۔

اب مخالف راسوں A کو C سے اور B کو D سے ملائیے [شکل (ii) 8.2 دیکھیے]

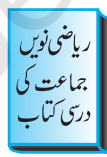
AC اور BD چار ضلعی ABCD کے دو وتر ہیں۔

اس باب میں ہم مختلف قسم کے چار ضلعی خاص طور سے متوازی الاضلاع کی خصوصیات کے بارے میں کچھ اور مطالعہ کریں گے۔

آپ کو حیرت ہوگی کہ ہم چار ضلعی (یا متوازی الاضلاع) کا مطالعہ کیوں کریں۔ اپنے چاروں طرف نظر ڈالئے آپ کو بہت سی ایسی چیزیں نظر آئیں گی جن کی شکل چار ضلعی ہے آپ کی کلاس کا فرش دیواریں، چھت، کھڑکیاں، بلیک بورڈ، ڈسٹر کا ہر رخ۔ آپ کی ریاضی کی کاپی کا ہر ایک صفحہ آپ کی میز کی اوپری سطح وغیرہ۔ ان میں سے کچھ نیچے دیے ہوئے ہیں [شکل 8.3 دیکھیے]



بلیک بورڈ



کتاب

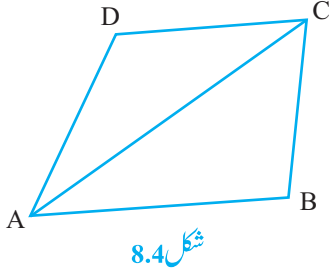


میز

شکل 8.3

حالاں کہ جتنی بھی چیزیں ہم اپنے اطراف میں دیکھتے ہیں۔ ان میں زیادہ تر ایک خاص قسم کا چار ضلعی ہے جو مستطیل کہلاتا ہے۔ ہم چار ضلعی خاص طور سے متوازی الاضلاع کے بارے میں کچھ اور مطالعہ کریں گے کیوں کہ مستطیل بھی ایک متوازی الاضلاع ہوتا ہے اور متوازی الاضلاع کی ساری خصوصیات مستطیل کے لیے درست ہوتی ہیں۔

8.2 چار ضلعی کے زاویوں کی جمعی خصوصیت (Angle Sum Property of a Quadrilateral)



آئیے چار ضلعی کے زاویوں کی جمعی خصوصیت کو دہراتے ہیں۔
ایک چار ضلعی کے زاویوں کا حاصل جمع 360° ہوتا ہے۔ اس کی تصدیق ہم ایک وتر بنا کر سکتے ہیں جو چار ضلعی کو دو مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

مان لیجیے ABCD ایک چار ضلعی ہے اور AC اس کا وتر [شکل 8.4 دیکھیے] $\triangle ADC$ کے زاویوں کا حاصل جمع کیا ہے؟ آپ جانتے ہیں کہ

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D = 180^\circ$$

اسی طرح سے $\triangle ABC$ میں $\angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^\circ$

(1) اور (2) کو جمع کرنے پر ہمیں حاصل ہوتا ہے

$$\angle DAC + \angle ACD + \angle D + \angle CAB + \angle ACB + \angle B = 180^\circ + 180^\circ = 360^\circ$$

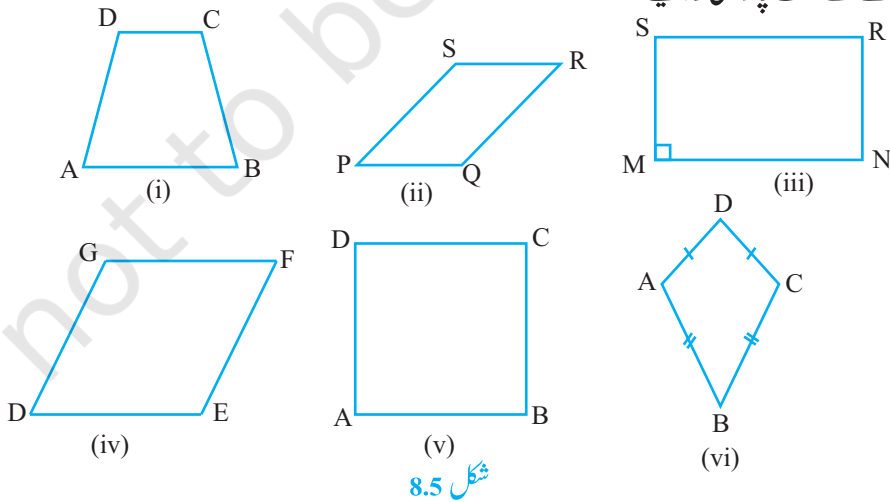
اور $\angle ACD + \angle ACB = \angle C$ اور $\angle DAC + \angle CAB = \angle A$

$$\angle A + \angle D + \angle B + \angle C = 360^\circ$$

یعنی چار ضلعی کے چاروں زاویوں کا حاصل جمع 360° ہے

8.3 چار ضلعی کی قسمیں (Types of a Quadrilaterals)

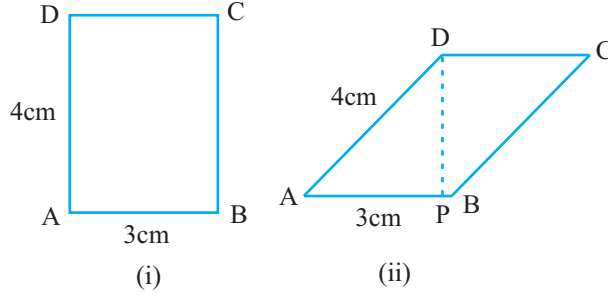
نیچے بنائے گئے مختلف چار ضلعی کو دیکھیے۔



شکل 8.5

مشاہدہ کیجیے کہ

- شکل (i) 8.5 میں چار ضلعی ABCD کے مقابل اضلاع کا ایک جوڑہ نام AB اور CD متوازی ہیں آپ جانتے ہیں کہ یہ منحرف کہلاتا ہے۔
- شکل (v) اور (iv), (iii), (ii) 8.5 میں دئے گئے چار ضلعی کے مقابل اضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہیں۔ یاد کیجیے کہ ایسے چار ضلعی متوازی الاضلاع کہلاتے ہیں۔ اس لیے شکل (ii) 8.5 کا چار ضلعی PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔ اسی طرح شکل (iv), (ii) 8.5 اور (v) کے سبھی چار ضلعی متوازی الاضلاع کہلاتے ہیں۔
- شکل (iii) 8.5 کے متوازی الاضلاع MNRS میں نوٹ کیجیے کہ اس کا ہر ایک زاویہ یعنی $\angle M$ زاویہ قائمہ ہے۔ اس خاص متوازی الاضلاع کو کیا کہتے ہیں۔ یاد کرنے کی کوشش کیجیے یہ مستطیل کہلاتا ہے۔
- شکل (iv) 8.5 کے متوازی الاضلاع DEFG کے تمام اضلاع مساوی ہیں، ہم جانتے ہیں کہ یہ معین کہلاتا ہے۔
- شکل (v) 8.5 کے متوازی الاضلاع ABCD میں $\angle A = 90^\circ$ ہے اور تمام اضلاع مساوی ہیں؛ یہ مربع کہلاتا ہے۔
- شکل (vi) 8.5 کے چار ضلعی ABCD میں $AD=CD$ اور $AB=CB$ یعنی متصل اضلاع کے دونوں جوڑے مساوی ہیں یہ متوازی الاضلاع نہیں ہیں۔ یہ ایک پٹنگ کہلاتی ہے۔
- نوٹ کیجیے کہ مربع، مستطیل اور معین تمام متوازی الاضلاع ہیں۔
- مربع ایک معین اور مستطیل بھی ہوتا ہے۔
- متوازی الاضلاع ایک منحرف بھی ہوتا ہے۔
- ایک پٹنگ ایک متوازی الاضلاع نہیں ہوتی ہے۔
- ایک منحرف متوازی الاضلاع نہیں ہوتا (کیوں کہ منحرف کے مقابل اضلاع کا صرف ایک جوڑا متوازی ہوتا ہے جبکہ متوازی الاضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہوتے ہیں)۔
- ایک مستطیل اور معین مربع نہیں ہے۔
- شکل 8.6 کو دیکھیے۔ ہمارے پاس ایک ہی احاطہ 14cm کے ایک مستطیل اور ایک متوازی الاضلاع ہے۔
- یہاں متوازی الاضلاع کا رقبہ $DP \times AB$ ہے اور یہ مستطیل کے رقبہ یعنی $AB \times AD$ ہے کم ہے کیوں کہ $DP < AD$

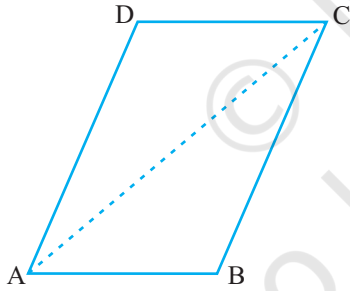


شکل 8.6

عام طور پر مٹھائی بیچنے والے دکاندار برقی کو متوازی الاضلاع کی شکل میں کاٹتے ہیں تاکہ زیادہ سے زیادہ برقی ٹرے میں رکھی جاسکیں۔ (اگلی مرتبہ برقی کھانے سے پہلے اس کی شکل پر غور کیجیے)

آئیے پچھلی کلاسوں میں پڑھی گئی متوازی الاضلاع کی کچھ خصوصیات کو دہراتے ہیں۔

8.4 متوازی الاضلاع کی خصوصیات (Properties of a Parallelogram)



شکل 8.7

آئیے ایک سرگرمی کرتے ہیں

ایک کاغذ کی ایک شیٹ سے وتر پر سے متوازی الاضلاع کو کاٹئے (شکل 8.7 دیکھیے) آپ کو دو مثلث حاصل ہوتے ہیں؟ آپ ان مثلثوں کے بارے میں کیا کہہ سکتے ہیں؟

ایک مثلث کو دوسرے پر رکھئے، اگر ضرورت ہو تو اس کو پلٹ کر رکھیے۔

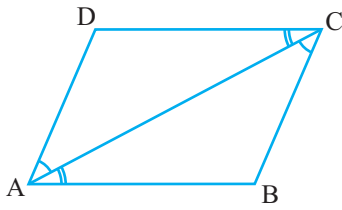
آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں۔ مشاہدہ کیجیے کہ دونوں مثلث ایک دوسرے کے متماثل ہوتے ہیں۔ اس مشغلہ کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرائیے ہر مرتبہ آپ پائیں گے کہ متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

آئیے اس نتیجہ کو ثابت کرتے ہیں۔

مسئلہ 8.1: متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔

ثبوت: مان لیجیے $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے اور AC اس کا وتر [شکل 8.8 دیکھیے] مشاہدہ کیجیے کہ وتر AC متوازی الاضلاع کو دو مثلثوں میں منقسم کرتا ہے یعنی $\triangle ABC$ اور $\triangle CDA$ ہمیں ان مثلثوں کو متماثل ثابت کرنے کی ضرورت ہے۔

$\triangle ABC$ اور $\triangle CDA$ میں نوٹ کیجیے کہ $AD \parallel BC$ اور AC ایک قاطع ہے



اس لیے $\angle BCA = \angle DCA$ (متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے)

اور $AB \parallel DC$ اور AC ایک قاطع ہے

اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$ (متبادل داخلی زاویوں کے جوڑے)

اور $AC = CA$ (مشترک)

اس لیے $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (ASA اصول)

یا وتر AC متوازی الاضلاع $ABCD$ کو دو متماثل مثلث ABC اور CDA میں منقسم کرتا ہے۔ اب متوازی الاضلاع کے مخالف اضلاع کی پیمائش کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ پاتے ہیں کہ $AB = DC$ اور $AD = BC$ ، یہ متوازی الاضلاع کی دوسری خصوصیت ہیں جو نیچے بیان کی گئی ہے۔

مسئلہ 8.2: متوازی الاضلاع میں مقابل اضلاع مساوی ہوتے ہیں۔

آپ پہلے ثابت کر چکے ہیں کہ وتر متوازی الاضلاع کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتے ہیں تو ان کے نظیری حصوں کے بارے میں آپ کیا کہہ سکتے ہیں؟ وہ برابر ہیں۔

اس لیے $AD = BC$ اور $AB = DC$

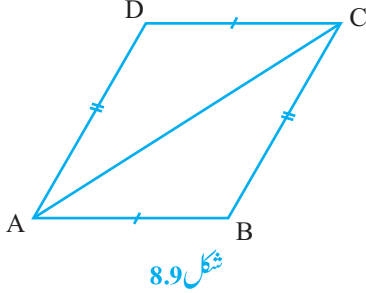
اس نتیجہ کا معکوس کیا ہے؟ آپ پہلے ہی جانتے ہیں کہ کسی مسئلہ میں جو دیا ہوا ہوتا ہے اسی کو اس کے معکوس میں ثابت کیا جاتا ہے اور جو مسئلہ میں ثابت کیا جاتا ہے وہ اس کے معکوس میں دیا ہوا ہوتا ہے۔ اس طرح سے مسئلہ 8.2 کو ہم مندرجہ ذیل میں بیان کرتے ہیں

اگر ایک چار ضلعی ایک متوازی الاضلاع ہے تب اس کے مقابل اضلاع کا ہر جوڑا مساوی ہوتا ہے اس لیے اس کا معکوس ہے۔

مسئلہ 8.3: اگر کسی چار ضلعی کے مقابل اضلاع کا ہر جوڑا مساوی ہو تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

کیا آپ وجہ بتا سکتے ہیں کیوں؟

مان لیجیے چار ضلعی $ABCD$ کے اضلاع AB اور CD مساوی ہیں اور $AD = BC$ [شکل 8.9 دیکھیے] وتر AC بنائیے



ظاہر ہے $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ (کیوں؟)

اس لیے $\angle BAC = \angle DCA$

اور $\angle BCA = \angle DAC$ (کیوں؟)

آپ ابھی دیکھ چکے ہیں کہ متوازی الاضلاع کا ہر مقابل جوڑا مساوی ہوتا ہے۔ اس کے برعکس اگر کسی چار ضلعی کا ہر ایک مخالف جوڑا مساوی ہو تو چار ضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے کیا ہم مخالف زاویوں کے لیے بھی یہی نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں؟

ایک متوازی الاضلاع بنائیے اور اس کے زاویوں کی پیمائش کیجیے۔ آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ مخالف زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہے۔

اس سرگرمی کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرائیے۔ ہم ایک اور نتیجہ کی طرف پہنچتے ہیں جو مندرجہ ذیل ہے:

مسئلہ 8.4: ایک متوازی الاضلاع میں مقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں۔

کیا اس مسئلہ کا معکوس بھی درست ہے؟ چار ضلعی کے زاویوں کی جمعی خصوصیت اور کسی قاطع کے ذریعے متوازی خطوط کو قطع کرنے پر حاصل نتائج کا استعمال کر کے ہم دیکھتے ہیں کہ اس کا معکوس بھی درست ہے۔ اس لیے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

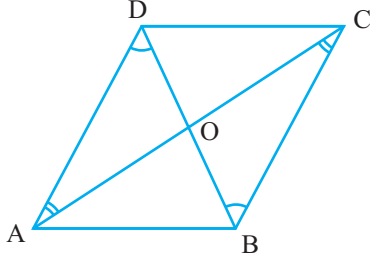
مسئلہ 8.5: اگر ایک چار ضلعی میں مخالف زاویوں کا ہر ایک جوڑا مساوی ہو تو یہ متوازی الاضلاع ہوگا۔ یہ متوازی الاضلاع کی ایک اور خصوصیت ہے۔ اس لئے اس کا مطالعہ کرتا ہے ایک متوازی الاضلاع ABCD بنائیے اور اس کے دونوں وتر بنائیے جو نقطہ O پر قطع کرتے ہیں [شکل 8.10 دیکھیے]

OA، OB، OC اور OD کی پیمائش کیجیے

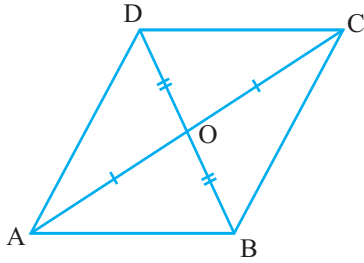
آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ مشاہدہ کریں گے کہ OA = OC اور OB = OD یا O دونوں وٹروں کا وسطی نقطہ ہے۔ اسی سرگرمی کو کچھ اور متوازی الاضلاع کے لیے دہرائیے: ہر مرتبہ آپ نوٹ کریں گے کہ O، وٹروں کا وسطی نقطہ ہے۔ اس طرح سے ہمیں مندرجہ ذیل مسئلہ ملتا ہے۔

مسئلہ 8.6: متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں

اب کیا ہوگا اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں؟ کیا یہ متوازی الاضلاع ہوگا؟ یقیناً یہ صحیح ہے یہ نتیجہ مسئلہ



شکل 8.10



شکل 8.11

8.6 کا معکوس ہے۔ یہ نیچے دیا ہوا ہے

مسئلہ 8.7 اگر کسی چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں تو یہ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اب اس مسئلہ کو مندرجہ ذیل طریقہ سے ثابت کر سکتے ہیں۔

نوٹ کیجیے کہ شکل 8.11 میں یہ دیا ہوا ہے کہ $OA = OC$ اور $OB = OD$

اس لیے $\triangle AOB \cong \triangle COD$ (کیوں؟)

اس لیے $\angle ABO = \angle CDO$ (کیوں؟)

اس سے ہمیں حاصل ہوتا $AB \parallel CD$

اسی طرح سے $BC \parallel AD$ اس لیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے۔

آئیے اب کچھ مثالیں حل کرتے ہیں۔

مثال 1: دکھائیے کہ مستطیل کا ہر زاویہ: زاویہ قائمہ ہے:

حل: آئیے دہراتے ہیں کہ مستطیل کیا ہے۔

مستطیل ایک متوازی الاضلاع ہے جس کا ایک زاویہ قائمہ ہوتا ہے۔

مان لیجیے ABCD ایک مستطیل ہے۔ جس میں $\angle A = 90^\circ$

ہمیں دکھانا ہے کہ $\angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$

ہمارے پاس ہے $AD \parallel BC$ اور AB ایک قاطع ہے [شکل 8.12 دیکھیے]

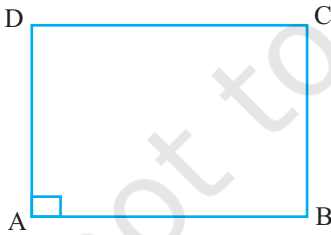
اس لیے $\angle A + \angle B = 180^\circ$ (قاطع کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویہ)

لیکن $\angle A = 90^\circ$

اس لیے $\angle B = 180^\circ - \angle A = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$

اب $\angle C = \angle A$ اور $\angle D = \angle B$ (متوازی الاضلاع کے مقابل زاویہ)

اس لئے $\angle C = 90^\circ$ اور $\angle D = 90^\circ$



شکل 8.12

اس لیے مستطیل کا ہر زاویہ قائمہ زاویہ ہوتا ہے۔

مثال 2: دکھائیے کہ معین کے وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں۔

حل: معین ABCD (شکل 8.13 دیکھیے) پر غور کیجیے۔

آپ جانتے ہیں کہ $AB=BC=CD=DA$ (کیوں؟)

اب ΔAOD اور ΔCOD میں $DOA=OC$ (متوازی الاضلاع کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں)

$OD=OD$ (مشترک)

$AD=CD$ (دیا ہوا ہے)

اس لیے $\Delta AOD \cong \Delta COD$ (SSS متماثلت شرط)

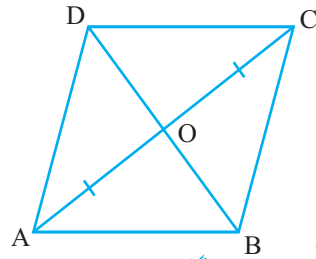
اس لیے $\angle AOD = \angle COD$ (CPCT)

لیکن $\angle AOD + \angle COD = 180^\circ$ (خطی جوڑا)

اس لیے $2\angle AOD = 180^\circ$

یا $\angle AOD = 90^\circ$

اس طرح سے معین کے وتر ایک دوسرے پر عمود ہوتے ہیں



شکل 8.13

مثال 3: ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB=AC$ ہے۔ AD خارجی زاویہ $\angle PAC$ کی تنصیف

کرتا ہے اور $CD \parallel AB$ (شکل 8.14 دیکھیے) دکھائیے کہ

(i) $\angle DCA = \angle BCA$ اور (ii) $ABCD$ ایک متوازی الاضلاع ہے۔

حل: (i) ΔABC ایک مساوی الساقین مثلث ہے جس میں $AB=AC$

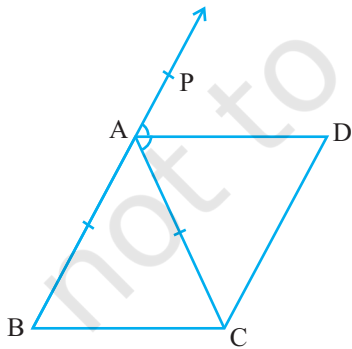
(دیا ہوا ہے)

اس لیے $\angle ABC = \angle ACB$ (مساوی ضلعوں کے سامنے کے زاویہ)

$\angle PAC = \angle ABC + \angle ACB$ (مثلث کا خارجی زاویہ)

(1) $\angle PAC = 2\angle ACB$ یا

(2) اب AD ، $\angle PAC$ کی تنصیف کرتا ہے



شکل 8.14

اس لیے $\angle PAC = 2\angle DAC$

اس لیے $\angle DAC = 2\angle ACB$ (1) اور (2) سے]

یا $\angle DAC = \angle ACB$

(ii) اب یہ مساوی زاویہ متبادل داخلی زاویوں کا جوڑا بناتے ہیں جب خطوط BC اور AD کو قاطع AC قطع کرتا ہے۔

اس لیے $BC \parallel AD$

اور دیا ہوا ہے $BA \parallel CD$

اب چار ضلعی ABCD کے مقابل اضلاع کے دونوں جوڑے متوازی ہیں۔

اس لیے ABCD ایک متوازی اضلاع ہے

مثال 4: دو متوازی خطوط l اور m کو قاطع p قطع کرتا ہے (شکل 8.15 دیکھیے)۔ دکھائیے کہ داخلی زاویوں کے ناصفوں سے بنا چار ضلعی مستطیل ہے۔

حل: یہ دیا ہوا ہے کہ $PS \parallel QR$ اور قاطع p ان کو نقطہ A اور C پر بالترتیب قطع کرتا ہے۔

$\angle PAC$ اور $\angle ACQ$ کے ناصف نقطہ B پر قطع کرتے ہیں اور $\angle ACR$ اور $\angle SAC$ نقطہ پر قطع کرتے ہیں۔ ہمیں دکھانا ہے کہ چار ضلعی ABCD ایک مستطیل ہے

اب $\angle PAC = \angle ACR$ (متبادل زاویہ کیوں $m \parallel l$ اور p ایک قاطع ہے)

اس لیے $\frac{1}{2}\angle PAC = \frac{1}{2}\angle ACR$

یعنی $\angle BAC = \angle ACD$

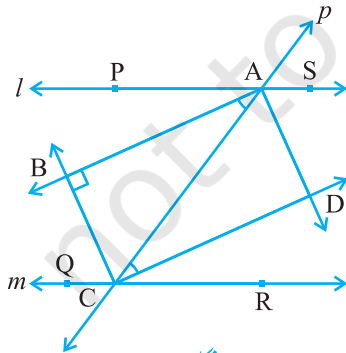
یہ خطوط AB اور DC کے لیے قاطع AC سے متبادل زاویوں کا جوڑا

بناتے ہیں اور یہ مساوی بھی سے

اس لیے $AB \parallel DC$

اسی طرح سے $BC \parallel AD$ ($\angle CAD$ اور $\angle ACB$ پر غور کیجیے)

اس لیے چار ضلعی ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے



شکل 8.15

$$\angle PAC + \angle CAS = 180^\circ \quad \text{اور} \quad (\text{خطی جوڑا})$$

$$\frac{1}{2} \angle PAC + \frac{1}{2} \angle CAS = \frac{1}{2} \times 180^\circ = 90^\circ \quad \text{اس لیے}$$

$$\angle BAC + \angle CAD = 90^\circ \quad \text{یا}$$

$$\angle BAD = 90^\circ \quad \text{یا}$$

اس لیے ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ 90° ہے۔

اس لیے ABCD ایک مستطیل ہے۔

مثال 5: دکھائیے کہ متوازی الاضلاع کے زاویوں کے ناصف ایک مستطیل کی تشکیل کرتے ہیں۔

حل: مان لیجیے P, Q, R, S بالترتیب متوازی الاضلاع ABCD کے

$\angle A$ اور $\angle B$ ، $\angle C$ اور $\angle D$ ، $\angle C$ اور $\angle D$ اور $\angle D$ اور $\angle C$

کے ناصفوں کے نقطہ تقاطع ہیں۔ (شکل 8.16 دیکھیے)

ΔASD میں آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟

کیوں کہ DS، $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے اور AS، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

$$\angle DAS + \angle ADS = \frac{1}{2} \angle A + \frac{1}{2} \angle D = \frac{1}{2} (\angle A + \angle D) \quad \text{اس لیے}$$

$$(\angle A + \angle D) = \frac{1}{2} \times 180^\circ$$

$$= 90^\circ$$

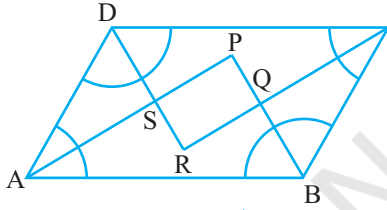
$$\angle DAS + \angle ADS + \angle DSA = 180^\circ \quad \text{اور} \quad (\text{مثلث کے زاویوں کی جمعی خصوصیت})$$

$$90^\circ + \angle DSA = 180^\circ \quad \text{یا}$$

$$\angle DSA = 90^\circ \quad \text{یا}$$

$$\angle PSR = 90^\circ \quad \text{اس لیے} \quad (\angle DSA \text{ کے بالقابل زاویہ})$$

اسی طرح یہ دکھایا جاسکتا ہے کہ $\angle APB = 90^\circ$ یا $\angle SPQ = 90^\circ$ (جیسا کہ $\angle DSA$ کے لیے دکھایا گیا)



شکل 8.16

(ہے) اسی طرح سے $\angle PQR = 90^\circ$ ہے اور $\angle SRQ = 90^\circ$

اس لیے PQRS ایک چار ضلعی ہے جس میں تمام زاویہ قائمہ زاویہ ہیں۔

کیا ہم یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ یہ ایک مستطیل ہے؟ اس لیے جانچ کریں۔

ہم دکھا چکے ہیں $\angle PSR = \angle PQR = 90^\circ$ اور $\angle SPQ = \angle SRQ = 90^\circ$ اس لیے مخالف زاویوں کا ہر جوڑا مساوی ہے۔

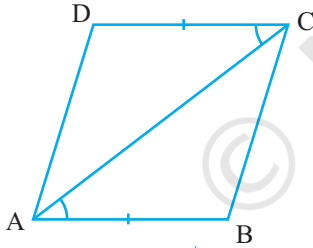
اس لیے PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں ایک زاویہ (دراصل تمام زاویہ) 90° کے ہیں۔

اور اس لیے PQRS ایک مستطیل ہے۔

8.5 چار ضلعی کے متوازی الاضلاع ہونے کی ایک اور شرط

(Another Condition for a Quadrilateral to be a Parallelogram)

اس باب میں آپ نے متوازی الاضلاع کی بہت سی خصوصیات کے بارے میں پڑھا اور آپ نے یہ بھی تصدیق کی کہ اگر کسی چار ضلعی میں ان میں سے ایک بھی خصوصیت مطمئن ہو تو یہ متوازی الاضلاع بن جاتا ہے۔



شکل 8.17

اس کو ہم مندرجہ ذیل مسئلہ کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

مسئلہ 8.8: ایک چار ضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے اگر مقابل اضلاع کا

ایک جوڑا مساوی ہو اور متوازی ہو۔

شکل 8.17 کو دیکھیے جس میں $AB \parallel CD$ اور $AB = CD$ ایک وتر

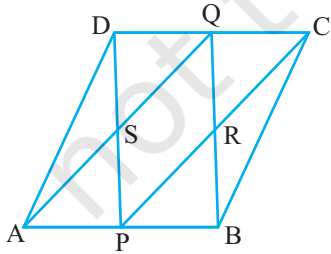
AC کھینچتے۔ آپ دکھا سکتے ہیں کہ $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ S A S

متماثل اصول

اس لیے $AD \parallel BC$ (کیوں؟)

متوازی الاضلاع کی اس خصوصیات کے اطلاق کے لیے آئیے ایک

مثال حل کرتے ہیں۔



شکل 8.18

مثال 6: ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے جس میں P اور Q مقابل اضلاع AB اور CD کے وسطی نقطے ہیں [شکل 8.18 دیکھیے] اگر AQ، DP، S کو BQ اور CP کو R پر قطع کریں تو دکھائیے کہ:

(i) APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے

(ii) DPBQ ایک متوازی الاضلاع ہے

(iii) PSQR ایک متوازی الاضلاع ہے

حل: (i) چار ضلعی APCQ میں

AP || QC (کیوں کہ AB || CD) (1)

$AP = \frac{1}{2} AB, CQ = \frac{1}{2} CD$ (دیا ہوا ہے)

اور AB = CD (کیوں؟)

اس لیے AP = QC (2)

اس لیے APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔ [(1) اور (2) اور مسئلہ 8.8 سے]

(ii) اسی طرح سے چار ضلعی DPBQ ایک متوازی الاضلاع ہے کیوں کہ DQ = PB اور DQPB

(iii) چار ضلعی PSQR میں

SP || QR (DP، SP کا ایک حصہ ہے اور QR، QB کا حصہ ہے)

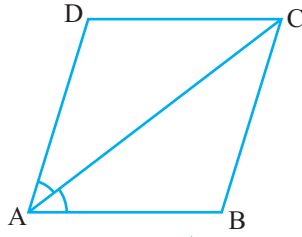
اسی طرح سے SQ || PR

اس لیے PSQR ایک متوازی الاضلاع ہے۔

مشق 8.1

1. ایک چار ضلعی کے زاویے 13: 9: 5: 3 کی نسبت میں ہیں۔ چار ضلعی کے تمام زاویہ معلوم کیجیے۔
2. اگر کسی متوازی الاضلاع کے وتر مساوی ہوں تو دکھائیے کہ یہ مستطیل ہے۔
3. دکھائیے کہ اگر چار ضلعی کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتے ہیں تو وہ معین ہے۔
4. دکھائیے کہ مربع کے وتر مساوی ہیں اور ایک دوسرے کی قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں

5. دکھائیے کہ اگر کسی چار ضلعی کے وتر مساوی ہوں اور ایک دوسرے کی تنصیف زاویہ قائمہ پر کرتے ہوں تو یہ ایک مربع ہے۔



شکل 8.19

6. متوازی الاضلاع ABCD کا وتر AC، $\angle A$ کی تنصیف کرتا ہے۔

[شکل 8.19 دیکھئے دکھائیے کہ]

(i) یہ $\angle C$ کی تنصیف کرے گا اور (ii) ABCD ایک معین ہے۔

7. ABCD ایک معین ہے۔ دکھائیے کہ وتر AC، $\angle A$ اور $\angle C$ کی تنصیف

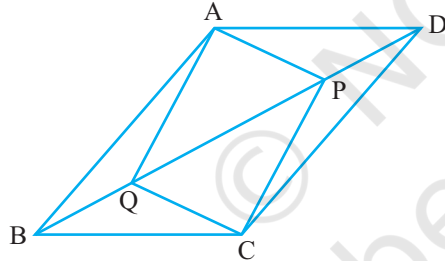
کرتا ہے اور وتر BD، $\angle B$ اور $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے

8. ABCD ایک مستطیل ہے جس میں AC، $\angle A$ اور $\angle C$ کی تنصیف کرتا ہے دکھائیے کہ

(i) ABCD ایک مربع ہے (ii) وتر BD، $\angle B$ اور $\angle D$ کی تنصیف کرتا ہے

9. متوازی الاضلاع ABCD میں P اور Q دو نقطہ وتر BD پر اس طرح ہیں کہ DP=BQ

[شکل 8.20 دیکھیے) دکھائیے کہ:

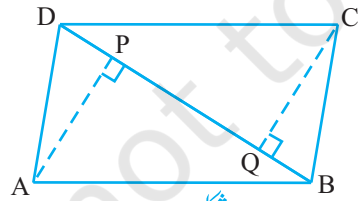


شکل 8.20

$$\Delta APQ \cong \Delta CQB \quad (i) \quad AP = CQ \quad (ii)$$

$$\Delta AQB \cong \Delta PCD \quad (iii) \quad AQ = CP \quad (iv)$$

(v) APCQ ایک متوازی الاضلاع ہے۔



شکل 8.21

10. ABCD ایک متوازی الاضلاع ہے اور AP اور CQ وتر BD پر

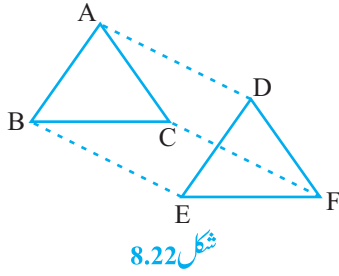
بالترتیب راس A اور C سے ڈالے گئے عمود ہیں (شکل 8.21)

دیکھیے دکھائیے کہ

$$\Delta APB \cong \Delta CQD \quad (i)$$

$$AP = CQ \quad (ii)$$

11. $\triangle ABC$ اور $\triangle DEF$ میں $AB=DE$ ، $BC=EF$ اور $BC \parallel EF$ ہے (راس A، B اور C بالترتیب راس D، E اور F سے ملائے) (شکل 8.22 دیکھئے) دکھائیے کہ:



(i) چار ضلعی ABED ایک متوازی الاضلاع ہے

(ii) چار ضلعی BEFC ایک متوازی الاضلاع ہے

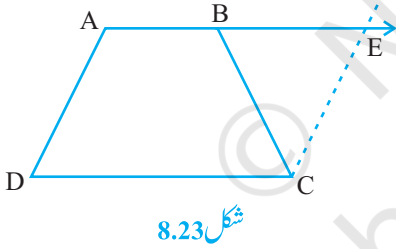
(iii) $AD \parallel CF$ اور $AD \parallel CF$

(iv) چار ضلعی ACFD ایک متوازی الاضلاع ہے

(v) $AC=DF$

(vi) $\triangle ABC \cong \triangle DEF$

12. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel CD$ اور $AD=BC$ (شکل 8.23 دیکھئے) دکھائیے کہ:



(i) $\angle A = \angle B$

(ii) $\angle C = \angle D$

(iii) $\triangle ABC \cong \triangle BAD$

(iv) وتر $BD=AC$ وتر

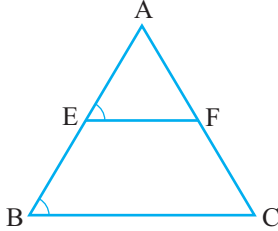
[اشارہ: AB کو بڑھائیے C سے گزرتا ہوا ایک خط DA کے متوازی بنائیے جو

بڑھے ہوئے AB کو E پر قطع کرے]

8.6 وسطی-نقطہ مسئلہ (Mid-point theorem)

آپ نے مثلث اور چار ضلعی کی بہت سی خصوصیات کا مطالعہ کیا آئیے اب ایک اور اہم نتیجہ کا مطالعہ کرتے ہیں جس کا تعلق مثلث کے وسطی نقاط سے ہے۔ مندرجہ ذیل سرگرمی کیجیے۔

ایک مثلث بنائیے اور اس کے دو اضلاع کے وسطی نقطہ E اور F مارک کیجیے اور E کو ملائیے۔ [شکل 8.24 دیکھئے] EF اور BC کی پیمائش کیجیے اور $\angle ABC$ اور $\angle AEF$ کی پیمائش کیجیے۔



شکل 8.24

آپ کیا مشاہدہ کرتے ہیں؟ آپ پاتے ہیں کہ

$$\angle AEF = \angle ABC \text{ اور } EF = \frac{1}{2} BC$$

اس لیے $EF \parallel BC$ - اس سرگرمی کو کچھ اور مثلثوں کے لیے دہرائیے۔

مسئلہ اس طرح سے آپ مندرجہ ذیل مسئلہ تک پہنچتے ہیں۔

مسئلہ 8.9: مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا قطعہ خط تیسرے ضلع

کے متوازی ہوتا ہے

آئیے ایک مثلث $\triangle ABC$ بنائیں۔

آپ مندرجہ ذیل طریقہ سے اس مسئلہ کو ثابت کر سکتے ہیں۔

شکل 8.25 کا مشاہدہ کیجیے جس میں E اور F بالترتیب AB اور AC کے وسطی نقطہ ہیں اور $CD \parallel BA$ ۔

$$\triangle AEF \cong \triangle CDF \text{ (ASA اصول)}$$

اس لیے $EF = DF$ اور $BE = AE = DC$ (کیوں؟)

اس لیے BCDE ایک متوازی الاضلاع ہے۔

اس سے حاصل ہوتا ہے $EF \parallel BC$

$$\text{نوٹ کیجیے کہ } EF = \frac{1}{2} ED = \frac{1}{2} BC$$

کیا آپ مسئلہ 8.9 کا معکوس بیان کر سکتے ہیں۔

آپ دیکھیں کہ مندرجہ بالا مسئلہ کا معکوس بھی درست ہوتا ہے جو مندرجہ ذیل ہے۔

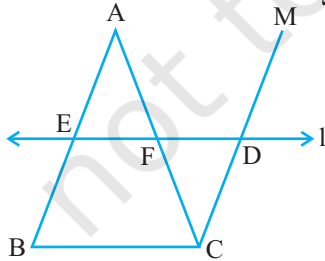
مسئلہ 8.10: مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا جانے والا خط جو دوسرے

ضلع کے متوازی ہو تو وہ تیسرے ضلع کی تنصیف کریگا۔

شکل 8.26 میں مشاہدہ کیجیے کہ $AB \parallel E$ کا وسطی نقطہ ہے۔ E سے گزرنے

والا خط $BC \parallel l$ ہے اور $CM \parallel BA$

$\triangle AEF$ اور $\triangle CDF$ کی متماثلت کو استعمال کرتے ہوئے ثابت کیجیے



شکل 8.26

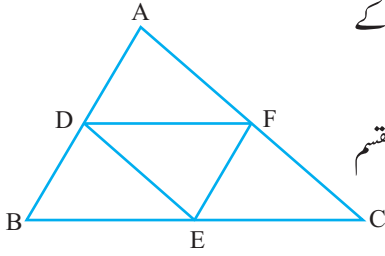
کہ $AF=CF$

مثال 7: $\triangle ABC$ میں D ، E اور F بالترتیب اضلاع AB ، BC اور CA کے

وسطی نقطے ہیں

[شکل 8.27 دیکھیے] دکھائیے کہ $\triangle ABC$ چار متماثل مثلثوں میں منقسم

ہو جاتا ہے۔



شکل 8.27

حل: کیوں کہ D اور E $\triangle ABC$ کے اضلاع AB اور BC کے وسطی نقطے ہیں

اس لیے مسئلہ 8.9 کی رو سے $DE \parallel AC$

اسی طرح سے $EF \parallel AB$ اور $DF \parallel BC$

اس لیے $ADEF$ ، $BDFE$ اور $DFCE$ تمام متوازی اضلاع ہیں

اب DE متوازی الاضلاع $BDFE$ کا وتر ہے

اس لیے $\triangle BDE \cong \triangle FED$

اسی طرح سے $\triangle DAF \cong \triangle FED$

اور $\triangle EFC \cong \triangle FED$

اس طرح سے چاروں مثلث متماثل ہیں۔

مثال 8: قاطع p اور q متوازی خطوط l ، m اور n کو اس طرح قطع کرتے ہیں کہ l اور m پر مساوی مقطوعہ

(Intercept) AB اور BC کو پر کاٹتے ہیں (شکل 8.28 دیکھیے)

دکھائیے کہ l اور m پر بھی مساوی مقطوعہ DE اور EF کاٹیں گے۔

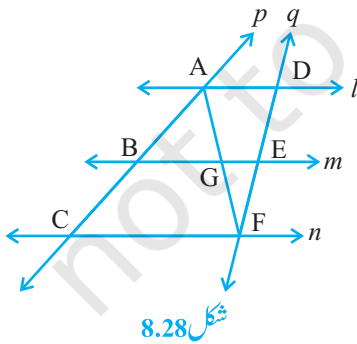
حل: اس میں دیا ہوا ہے کہ $AB=BC$ اور ہمیں ثابت کرنا ہے کہ $DF=EF$ ۔

آئیے A سے F کو ملائیں جو m کو G پر قطع کرے۔

منحرف $ACFD$ دو مثلثوں میں منقسم ہو گیا۔ جن کے نام ہیں

$\triangle AFD$ اور $\triangle ACF$

$\triangle ACF$ میں یہ دیا ہوا ہے کہ B ، AC کا وسطی نقطہ ہے ($AB=BC$)



شکل 8.28

اور $CF \parallel BG$ (کیوں کہ $m \parallel n$)

اس لیے G کا وسطی نقطہ ہے (مسئلہ 8.10 کا استعمال کرتے ہوئے)

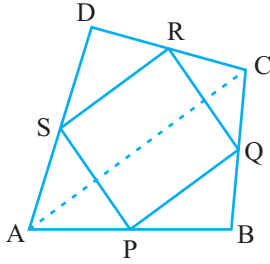
اب $\triangle AFD$ میں ہم یہی دلائل استعمال کرتے ہیں کیوں کہ G کا وسطی نقطہ ہے $AD \parallel GE$ اور اس لئے

مسئلہ 8.10 کی رو سے E کا وسطی نقطہ ہے

یعنی $DE = EF$

دوسرے لفظوں میں l ، m ، n اور q پر بھی مساوی مقطوعہ کاٹیں گے۔

مشق 8.2



شکل 8.29

1. ABCD ایک چار ضلعی ہے جس میں P، Q، R اور S اضلاع AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقطہ ہیں (شکل 8.29 دیکھیے) AC

ایک وتر ہے۔ دکھائیے کہ

$$SR = \frac{1}{2} AC \text{ اور } SR \parallel AC \quad (i)$$

$$PQ = SR \quad (ii)$$

(iii) PQRS ایک متوازی الاضلاع ہے۔

2. ABCD ایک معین ہے اور P، Q، R اور S بالترتیب اضلاع AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقطہ ہیں۔ دکھائیے کہ

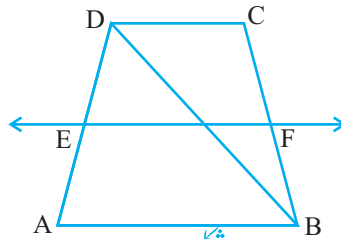
چار ضلعی PQRS مستطیل ہے۔

3. ABCD ایک مستطیل ہے اور P، Q، R اور S بالترتیب اضلاع AB، BC، CD اور DA کے وسطی نقطہ ہیں۔ دکھائیے کہ

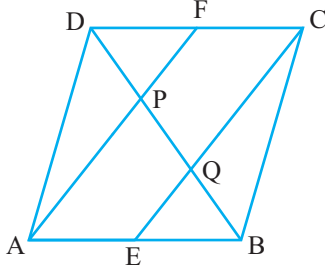
چار ضلعی PQRS معین ہے۔

4. ABCD ایک منحرف ہے جس میں $AB \parallel DC$ اور BD وتر ہے اور E کا وسطی نقطہ ہے۔ E سے گذرتا ہوا ایک خط

AB کے متوازی کھینچئے جو BC کو F پر قطع کے شکل (8.30) دیکھیے کہ $BC \parallel EF$ کا وسطی نقطہ ہے۔



شکل 8.30



شکل 8.31

5. متوازی الاضلاع ABCD میں E اور F بالترتیب اضلاع AB اور CD کے وسطی نقطے ہیں (شکل 8.31) دکھائیے کہ قطعات خط AF اور EC و BD کو تین برابر حصوں میں بانٹتے ہیں۔

6. دکھائیے کہ کسی چار ضلعی کے مقابل (مخالف) اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والے قطعات خط ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔

7. ABC ایک مثلث ہے جس میں $\angle C$ زاویہ قائمہ ہے۔ وتر AB کے وسطی نقطہ M سے گذرتا ہوا ایک خط AB ہے جو AC کے متوازی ہے، AC کو D پر قطع کرتا ہے۔ دکھائیے کہ

(i) AC، D کا وسطی نقطہ ہے۔

(ii) $MD \perp AC$

(iii) $CM = MA = \frac{1}{2} AB$

8.7 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل چیزیں پڑھیں

1. چار ضلعی کے زاویوں کا حاصل جمع 360° ہوتا ہے
2. متوازی الاضلاع کا وتر اس کو دو متماثل مثلثوں میں منقسم کرتا ہے۔
3. متوازی الاضلاع میں:
 - (i) مقابل اضلاع مساوی ہوتے ہیں (ii) مقابل زاویہ مساوی ہوتے ہیں (iii) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں۔
 4. ایک چار ضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے اگر:
 - (i) مقابل اضلاع مساوی ہوں (ii) مقابل زاویہ مساوی ہوں (iii) وتر ایک دوسرے کی تنصیف کریں۔
 - (iv) مقابل اضلاع کا ایک جوڑا مساوی اور متوازی ہو
 5. مستطیل کے وتر ایک دوسرے کی تنصیف کرتے ہیں اور مساوی ہوتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔

6. معین کے وتر ایک دوسرے کو قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔
7. مربع کے وتر ایک دوسرے کی قائمہ زاویہ پر تنصیف کرتے ہیں اور مساوی ہوتے ہیں اور اس کا معکوس بھی درست ہے۔
8. مثلث کے دو اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے والا قطع خط تیسرے ضلع کے مساوی اور اس کا آدھا ہوتا ہے
9. مثلث کے ایک ضلع کے وسطی نقطہ سے کھینچا گیا خط جو دوسرے ضلع کے متوازی ہوتا ہے تیسرے ضلع کی تنصیف کرے گا۔
10. چار ضلعی کے اضلاع کے وسطی نقطوں کو ملانے سے بننے والا چار ضلعی متوازی الاضلاع ہوتا ہے۔