4915CH05

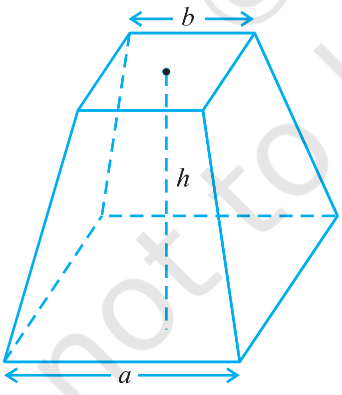
باب 5

اُقلیدس جیومیٹری کا تعارف

(INTRODUCTION TO EUCLID'S GEOMETRY)

1.5 تعارف: (Introduction)

لفظ جیومیٹری یونانی الفاظ 'جیو' جس کے معنی زمین اور میٹری؛ جس کے معنی پیمائش سے ہے، لیا گیا ہے۔ بظاہر جیومیٹری کی شروعات زمین کی پیمائش کو لیکر ہوئی، ریاضی کی اس شاخ کا مطالعہ مختلف شکلوں میں ہر قدیمی تہذیب چاہے وہ مصری ہو، چین کی ہو، ہندوستان کی یا یونان وغیرہ کی ہو۔ ان تہذیبوں کے لوگوں نے مختلف عملی مسائل کا سامنا کیا جس کے لئے مختلف شکلوں میں جیومیٹری کا فروغ مطلوب تھا۔



شکل 5.1 ایک اہرام

مثال کے طور پر جب بھی مصر میں دریائے نیل میں پانی زیادہ چڑھا اس نے مختلف زمین مالکوں کی منسلک زمینوں کی حدود کو تہس نہس کر دیا۔ سیلاب کے بعد ان حدود کو دوبارہ قائم کرنے کی ضرورت ہوتی تھی۔ اس مقصد کو پورا کرنے کے لئے مصریوں نے جیومیٹری کی نئی نئی تکنیک اور قوانین نکالے جن کا استعمال آسان رقبوں کی تحسیب کرنا اور آسان سی عملیات وغیرہ کرنا تھا۔ جیومیٹری کے علم کا استعمال کر کے انھوں نے گوداموں کے حجم معلوم کیے۔

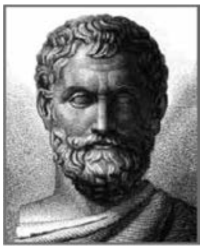
نہریں اورا ہرام(Pyramids) وغیرہ کی بنانے میں کیا وہ Truncated Pyramids (شکل 5.1 دیکھئے) کے حجم نکالنے کے فارمولہ سے بھی واقف تھے، آپ جانتے ہیں کہ Pyramid ایک ایسی ٹھوس شکل ہے جس کا اساس (قاعدہ) ایک مثلث یا مربع یا کوئی دوسرا کثیر ضلعی ہوتا ہے اس کے اطلاع کے رخ مثلث ہوتے ہیں جو اوپر کی طرف ایک نقطہ پر آ کر ملتے ہیں۔

ہندوستان برصغیر میں ہڑپا اور موہن جوداڑوں وغیرہ کی کھدائی سے یہ پتہ چلتا ہے کہ انڈس ویلی تہذیب (300 ق.م) نے جیومیٹری کا استعمال خوب کیا۔ یہ ایک بہت ہی منظّم سماج تھا۔ان کے شہر ترقی یافتہ اور منصوبہ بند تھے۔مثال کے طور پر زیادہ تر سڑکیں ایک دوسرے کے متوازی تھیں اور گندگی کے اخراج کا نظام سب زیر زمین تھا۔مکانوں میں مختلف قسم کے بہت سے کمرہ ہوتے تھے۔اس سے پتہ چلتا ہے کہ شہروں میں رہنے والے علم مساحت اور علم اعداد سے بخوبی واقف تھے۔عمارتوں کی بناوٹ میں استعمال ہونے والی اینٹیں بھٹی میں تپی ہوئی ہوتی تھیں اور اس کی لمبائی، چوڑائی اور موٹائی میں نسبت بالترتیب 4:2:1 کی ہوتی تھیں۔

قدیم ہندوستان میں Sulbasutras (800 ق.م. سے 500 ق.م) میں ہاتھ کی بنائی ہوئی تعمیرات تھیں، ویدک پیریڈ کی جیومیٹری کی شروعات altars (یا ویدیں) اور ویدیک رسومات کو عملی جامہ پہنانے کے لئے (Fireplace) کی تعمیرات سے ہوئی۔اس مقدس آگ کی جگہ اس کی شکل اس کا رقبہ دی گئی ویدانتوں کے عین مطابق ہوتا تھا۔تاکہ وہ ایک مؤثر اوزار ثابت ہوسکیں، مربع اور دائری altars کا استعمال گھریلو رسومات کے لئے اور جنگی شکل مستطیلوں، مثلثوں اور منحرفوں کا امتزاج تھا۔ان کا استعمال عام لوگوں کے پوجا پاٹ کے لئے ہوتا تھا۔Sriyantra (جو Atharvaveda میں دیئے گئے ہیں) میں جڑے ہوئے نو مساوی الساقین مثلثوں پر مشتمل مثلوں کو اس طرح ترتیب دیا جاتا ہے کہ ان سے 43 تحتی مثلث اور بنتے ہیں، حالانکہ altras کی تعمیر میں بالکل درست جیومیٹری کے طریقہ استعمال ہوتے تھے لیکن ان کے پس پردہ جو اصول استعمال ہوتے ان کے بارے میں کچھ بتایا نہیں گیا ہے۔

ان مثالوں سے پتہ چلتا ہے کہ دنیا بھر میں جیومیٹری کو فروغ ملا اور اس کا استعمال ہوا۔لیکن یہ سب غیر منظّم طریقہ سے ہوا۔قدیم دنیا میں جیومیٹری کے فروغ کے سلسلہ میں دلچسپ بات یہ ہے کہ زبانی طور پر یا پام کی پتیوں کے پیغام کے طور پر یا ایسے ہی دوسرے طریقوں سے یہ نسل در نسل منتقل ہوتی گئی، کچھ تہذیبوں جیسے Babylonia میں ہم پاتے ہیں کہ جیومیٹری ایک بہت عملی مضمون تھا یہی ہندوستان اور روم میں بھی سمجھا جاتا تھا۔مصریوں نے جس جیومیٹری کو فروغ دیا وہ صرف نتائج کے بیانات پر مشتمل ہے۔وہاں طریقہ کا کوئی عام اصول نہیں تھا۔درحقیقت مصریوں اور Babylonians نے جیومیٹری کو زیادہ تر

(عملی) مقاصد کے لئے استعمال کیا۔ انھوں نے ایک منظّم سائنس کے طور پر اس کے فروغ کے لئے کچھ نہیں کیا لیکن تہذیبوں جیسے یونان وغیرہ نے زور اس بات پر دیا کہ کسی عملی کام کے پیچھے کیا وجوہات ہوتی ہیں۔ یونانیوں کی دلچسپی اس بات میں تھی کہ انھوں نے جو بیانات استخراجی منطقی کو استعمال کر کے دریافت کئے گئے تھے، ان کی سچائی کو قائم کریں۔ (Appendix! دیکھیے)۔



شکل 5.2 تھیلس
640ق م . 546ق م

شکل 5.3 اُقلیدس
325ق م۔265ق م

تھیلس (640 ق.م-546 ق.م) وہ یونانی ریاضی داں تھا جس نے پہلا ثبوت دیا اور یہ ثبوت تھا کہ دائرے کا قطر اس کی تصنیف (دو برابر حصوں میں بانٹا) کرتا ہے۔ آپ نے تھیلس کے ایک مشہور شاگرد فیثاغورث (572 ق.م) کے بارے میں سنا ہوگا۔ فیثاغورث اور اس کے گروپ نے جیومیٹری کی خصوصیات کو دریافت کیا اور کافی حد تک جیومیٹری کے نظریہ کو فروغ دیا اور یہ عمل 300 ق.م تک جاری رہا۔ اس وقت اُقلیدس (Euclid) جو مصر کے Alexandria میں ریاضی کا استاد تھا، نے اس وقت تک ہوئی تمام دریافتوں کو اکٹھا کیا اور عناصر (Elements) نام سے ان کو ترتیب دیا۔ اس نے عناصر (Elements) کو تیرہ بابوں میں منقسم کیا۔ ہر ایک باب ایک کتاب کہلایا ان کتابوں سے دنیا میں آنے والی نسلوں کے اندر جیومیٹری کی سمجھ کو اثر انداز کیا۔

اس باب میں ہم اُقلیدس (Euclid) کی جیومیٹری کا مطالعہ کریں گے اور موجودہ دور کی جیومیٹری سے اس کو منسلک کرنے کی کوشش کریں گے۔

5.2 اُقلیدس کی تعریفیں، بدیجات اور موضوعات

(Euclid's Definitions, Axioms and Postulates)

اُقلیدس کے دور کے یونانی ریاضی دانوں کے خیال میں جیومیٹری اس دنیا جس میں وہ رہتے ہیں، کا ایک تجریدی ماڈل ہے۔ نقطہ، خط، مستوی (یا سطح) کا نظریہ ان کے اطراف میں موجود چیزوں سے ہی اخذ کیا گیا۔ خلاء (Space) اور ان کے اطراف خلاء میں موجود ٹھوسوں (Solids) کے مطالعہ سے ٹھوس شرکاء ایک تجریدی جیومیٹری ماڈل کا نظریہ قائم ہوا۔ ٹھوس کی ایک شکل، سائز اور مقام ہوتا ہے اور اس کو ایک جگہ سے دوسری جگہ ہلایا جا سکتا ہے، اس کی باؤنڈری کو سطح کہلاتی ہیں۔ یہ سطح (Surface) خلاء کے ایک حصہ کو دوسرے سے الگ کرتی ہیں اور ان کی کوئی موٹائی نہیں ہوتی، ان سطحوں کی باؤنڈریز خط منحنی یا خط منقسم ہیں ان

خطوط کا خاتمہ نقطوں پر ہوتا ہے۔

ٹھوسوں اور نقطوں کے درمیان تین اقدام پر غور کیجئے (ٹھوس-سطحیں-خطوط- نقطے) ہر قدم پر ہم ایک بعد (dimension) کھوتے ہیں اس لئے یہ کہا جاتا ہے کہ ایک ٹھوس کی تین ابعاد ایک سطح کی دو خط کی ایک اور نقطہ کی کوئی بعد نہیں ہوتی، یوکلڈ نے ان بیانات کا خلاصہ ان کی تعریفوں سے کیا ہے۔اس کی شروعات اس نے عناصر کی کتاب میں اپنی 23 تعریفوں کو بیان کر کے کی ہے، ان میں سے کچھ نیچے دی گئی ہیں۔

1. نقطہ وہ ہے جس کا کوئی حصہ نہیں ہے۔
2. ایک خط بغیر چوڑائی والی لمبائی ہے۔
3. خطوط کے سرے نقطے ہیں۔
4. ایک خط مستقیم وہ خط ہے جو اپنے پر اس موجود نقطوں کا سیٹ ہے
5. ایک سطح (Surface) وہ ہے جس کی صرف لمبائی اور چوڑائی ہوتی ہے
6. سطح کے کنارے خطوط ہیں
7. ایک مسطوی سطح، خطوط مستقیم کا ایک سیٹ ہے۔

اگر آپ غور سے ان تعریفوں کا مطالعہ کریں تو آپ دیکھیں گے کہ کچھ ارکان جیسے حصہ چوڑائی، لمبائی وغیرہ کی مزید وضاحت کی ضرورت ہے، مثال کے طور پر اس کے نقطہ کی تعریف پر غور کیجئے اس تعریف میں حصہ کی مزید تعریف کرنے کی ضرورت ہے، فرض کیجئے اگر آپ حصہ کی اس طرح تعریف کرتے ہیں کہ وہ چیز جو جگہ گھیرتی ہے تو پھر رقبہ کو تعریف کرنے کی ضرورت ہوتی ہے اس طرح سے ایک چیز کی تعریف بیان کرنے کے لئے آپ کو بہت سی چیزوں کی تعریف کرنے کی ضرورت ہوگی اس طرح سے ایک نا ختم ہونے والی تعریفوں کی چین بن جائیگی۔اس وجہ سے آسانی کے لئے یہ طے کیا گیا کہ کچھ جیومیٹریائی ارکان کو غیر معرف ہی چھوڑ دیا جائے، اس طرح ہم کو نقطہ کے جیومیٹریائی تصور کو بہتر طور پر محسوس کر سکتے ہیں جو کہ اس کی مذکورہ بالا تعریف سے ممکن نہیں، اس لئے ہم نقطہ کو ایک ڈاٹ سے ظاہر کرتے ہیں جس کی کچھ لمبائی، چوڑائی یا موٹائی ہوتی ہے۔

اسی طرح کا مسئلہ مذکورہ بالا تعریف 2 میں بھی آتا ہے جس میں لمبائی اور چوڑائی کا استعمال ہوا ہے، جبکہ ان دونوں کی تعریف بیان نہیں کی گئی، جس کی وجہ سے کچھ ارکان کو غیر معروف رکھا گیا۔اس طرح سے جیومیٹری میں ہم نقطہ، خط اور مستوی

(یوکلڈ کی زباں میں مستوی سطح) کو غیر معروف ارکان کے طور پر لیتے ہیں، ہم صرف ان کو وجدانی طور پر ظاہر کر سکتے ہیں یا کسی فزیکل ماڈل کی مدد سے اس کی تشریح کر سکتے ہیں۔

تعریفوں سے شروع کرتے ہوئے یوکلڈ نے کچھ خصوصیات کو فرض کیا جس کو ثابت کرنے کی ضرورت نہیں۔ یہ مفروضات دراصل واضح کائناتی سچ ہیں، اس نے ان کو دو قسموں میں تقسیم کیا۔ بدیہات(axiom) اور موضوعات (Postulats) اس نے رکن 'موضوعہ' کو جیومیٹری کے لئے مخصوص مفروضات کے لئے استعمال کیا۔ دوسری طرف عام نظریہ (جو اکثر بدیہہ کہلاتا ہے) دو مفروضات ہیں جن کا استعمال صرف جیومیٹری میں نہیں بلکہ پوری ریاضی میں ہوتا ہے، ان بدیہات اور موضوعات کی تفصیل کے لئے Appendix دیکھئے۔ اقلیدس کے کچھ بدیہات، اس کی دی ہوئی ترتیب کے بغیر، مندرجہ ذیل ہیں:

(1) چیزیں جو ایک ہی چیز کے مساوی ہوتی ہیں آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔
(2) اگر مساوی چیزیں مساوی چیزوں میں جمع کی جاتیں تو حاصل شدہ چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔
(3) اگر مساوی چیزوں میں سے مساوی چیزیں گھٹائی جائیں تو باقی چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔
(4) چیزیں جو ایک دوسرے پر منطبق ہوں آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔
(5) مکمل حصہ سے بڑا ہوتا ہے۔
(6) چیزیں جو کسی ایک سی چیزوں کا دگنا ہوتی ہیں آپس میں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔
(7) چیزیں جو کسی ایک سی چیزوں کی آدھی ہوتی ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

ان عام نظریوں کا تعلق خاص قسم کی قدروں سے ہے۔ پہلے نظریہ کا اطلاق مستوی اشکال پر ہوتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر ایک مثلث کا رقبہ ایک مستطیل کے رقبہ کے برابر ہے اور مستطیل کا رقبہ مربع کے رقبہ کے برابر ہے تب مثلث کا رقبہ بھی مربع کے رقبہ کے برابر ہوگا۔

ایک ہی قسم کی قدروں کو جمع اور موازنہ کیا جا سکتا ہے لیکن مختلف قسم کی قدروں کا موازنہ نہیں کہا جا سکتا، مثال کے طور پر ایک خط کا موازنہ مستطیل سے نہیں کیا جا سکتا، نہ ہی کسی زاویہ کا موازنہ کسی پانچ ضلعی سے کیا جا سکتا۔

مذکورہ بالا چوتھے بدیہہ سے پتہ چلتا ہے کہ اگر دو چیزیں یکساں ہیں تو وہ مساوی بھی ہیں۔ دوسرے الفاظ میں ہر چیز اپنے آپ کے برابر ہوتی ہے۔ یہ منطق کے اصول کا جواز ہے۔ بدیہہ (5) بڑا ہے، کی تعریف دیتا ہے۔ مثال کے طور پر اگر مقدار

ایک مقدار A کا حصہ ہے تب A کو ہم B اور کسی تیسری مقدار کے حاصل جمع کے طور پر لکھا جا سکتا ہے۔ علامتی طور پر $A>B$ کا مطلب ہے کہ کوئی C ہے جس کے لئے $A=B+C$

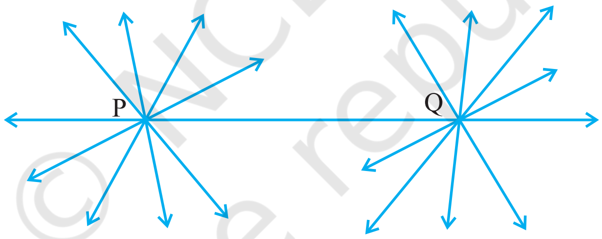
آیئے اب اقلیدس کے پانچ موضوعات کا مطالعہ کرتے ہیں۔

موضوعہ نمبر I: ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خط مستقیم کھینچا جا سکتا ہے۔

اس موضوعہ سے ہمیں یہ تو پتہ چلتا ہے کہ دو مختلف نقطوں سے کم سے کم ایک خط کھینچا جا سکتا ہے لیکن یہ اس بات کی منافی نہیں کرتا کہ صرف ایک ہی خط دو نقطوں سے کھینچا جا سکتا ہے۔ جبکہ اقلیدس نے اپنی کتابوں میں بغیر بیان کئے یہ فرض کیا ہے کہ دو مختلف نقطوں سے صرف ایک خط ہی کھینچا جا سکتا ہے۔ ہم اس نتیجہ کو مندرجہ ذیل بدیجہ کی شکل میں بیان کرتے ہیں۔

بدیجہ نمبر 5.1: دو مختلف نقطے دیئے ہوئے ہیں ان سے گزرتا ہوا صرف ایک ہی خط کھینچا جا سکتا ہے

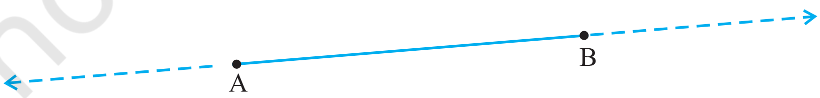
کتنے خطوط ہیں جو P سے گذر رہے ہیں اور Q سے بھی گذر رہے ہیں (شکل 5.4 دیکھئے) صرف ایک اور وہ خط PQ ہے، ہے اس طرح سے مذکورہ بالا بیان بالکل درست ہے اس لئے اس کو ایک بدیجہ کے طور پر مان لیا گیا ہے۔



شکل 5.4:

موضوعہ 2: ایک ختم ہونے والے خط کو لامحدود طور پر بڑھایا جا سکتا ہے۔

نوٹ کیجئے آج ہم جس کو قطع خط کہتے ہیں اقلیدس نے اس کو خط کیا تھا، اس لئے آج کے دور کے حساب سے موضوعہ 2 کے مطابق قطعہ خط کو کسی بھی سمت میں لامحدود طور پر بڑھایا جا سکتا ہے (شکل 5.4 دیکھئے)۔



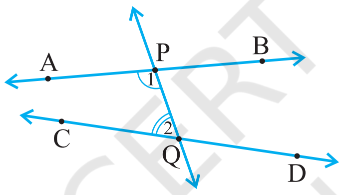
شکل 5.5

موضوعہ 3: کسی بھی مرکز اور نصف قطر کا دائرہ بنایا جا سکتا ہے۔

موضوعہ 4: تمام زاویہ قائمہ آپس میں ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

موضوعہ 5: اگر ایک خط مستقیم دو خطوط مستقیم کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کو ایک ساتھ لیں جو دو زاویہ قائمہ سے کم ہوں تب دونوں خطوط کو اگر لامحدود طور پر بڑھایا جائے تو وہ اس طرف ملتے ہیں جہاں زاویہ دو زاویہ قائمہ سے کم ہیں۔

مثال کے طور پر شکل 5.6 میں خط PQ خطوط AB اور CD کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ داخلی زاویوں 1 اور 2 کا حاصل جمع PQ کے بائیں طرف، 180 سے کم ہے، اس لئے AB اور CD بڑھانے پر PQ کے بائیں طرف قطع کریں گے۔



شکل 5.6

پانچوں موضوعوں کو مختصراً دیکھنے پر آپ کے نوٹس میں یہ بات آئیگی کہ پانچواں موضوعہ باقی موضوعوں کے مقابلہ میں زیادہ پیچیدہ ہے، دوسری طرف اسے 4 تک کے موضوعہ ایسے سادہ ہیں کہ ان کو ایسی سچائیوں کے طور پر لیا جا سکتا ہے جس کے ثبوت کی ضرورت نہیں۔ حالانکہ ان کو ثابت کرنا ممکن بھی نہیں ہے۔ اس لئے ان بیانات کو بغیر ثبوت کے قبول کیا گیا (Appendix-1 دیکھئے)۔ پیچیدگی کی وجہ سے پانچویں موضوعہ کو اگلے سیکشن میں زیادہ توجہ دی گئی ہے۔

آجکل موضوعات اور بدیہات تقریباً ایک ہی مفہوم میں استعمال ہوتے ہیں، موضوعہ دراصل ایک فعل ہے جب ہم کہتے ہیں کہ ہم کچھ موضوع کریں اس کا مطلب ہوتا ہے کہ کائنات میں کسی عمل کا مشاہدہ کر کر کچھ بیانات بنائے جائیں۔ اس کی سچائی/افادیت کی جانچ بعد میں کی جائے۔ اگر یہ سچ ہو تو اسے ایک موضوعہ کے طور پر قبول کیا جائے۔

بدیہات کا مجموعہ تاب (Consistent) (Appendix-1 دیکھئے) کہلاتا ہے اگر ان سے اس بیان کا استخراج ممکن نہ ہو جو کسی دوسرے بدیہہ یا پہلے سے ثابت بیان کی نفی کرے اس لئے جب بھی بدیہات کا کوئی نظام دیا ہو تو اس بات کی یقین دہانی کر لینی چاہئے کہ وہ نظام تابع ہو۔

اپنے بدیحات اور موضوعات کو بیان کرنے کے بعد اقلیدس نے ان کا استعمال دوسرے نتائج کو ثابت کرنے میں کیا۔ان نتائج کو استعمال کرتے ہوئے اس نے انتہائی منطق سے کچھ اور نتائج ثابت کئے ۔جن بیانات کو ثابت کیا گیا وہ مسئلہ (Propositions / theorems) کہلائے، اقلیدس نے اپنے بدیحات اور موضوعات کو استعمال کرتے ہوئے 465 بیانوں کا ایک منطقی چین میں استخراج کیا۔تعریفوں اور مسئلوں کو شروع میں ہی ثابت کیا گیا۔جیومیٹری پر اگلے کچھ بابوں میں اب ان بدیحوں کا استعمال کچھ مسئلوں کو ثابت کرنے میں کریں گے۔

آیئے اب ہم مندرجہ ذیل مثالوں میں دیکھتے ہیں کہ اقلیدس نے کس طرح کچھ نتائج کو ثابت کرنے میں اپنے بدیحات اور موضوعات کا استعمال کیا۔

مثال 1: اگر B,A اور C کسی خط پر تین نقطے ہیں اور A,B اور C کے درمیان ہے (شکل 5.7 دیکھئے) تو ثابت کیجئے

$$AB+BC=AC$$

شکل 5.7

حل: مندرجہ بالا دی ہوئی شکل میں AC، AB+BC پر منطبق ہے

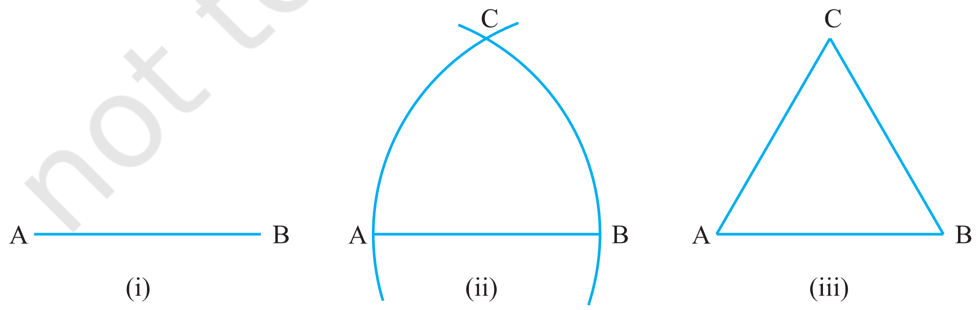
اقلیدس کا (4) بدیحہ کہتا ہے کہ جو چیزیں ایک دوسرے پر منطبق ہوئی ہیں وہ ایک دوسرے کے برابر ہوتی ہیں اس لئے یہ استخراج کیا جاسکتا ہے کہ

$$AB+BC=AC$$

نوٹ کیجئے کہ اس حل میں یہ مان لیا گیا ہے کہ دو نقطوں سے صرف ایک ہی خط گزرتا ہے۔

مثال 2: ثابت کیجئے کہ ایک دیئے ہوئے قطع خط پر ایک مساوی ضلعی مثلث بنایا جاسکتا ہے۔

حل: اوپر دیئے گئے بیان میں کسی لمبائی کا ایک قطع خط دیا ہوا ہے مان لیجئے وہ AB ہے (شکل (i) 5.8 دیکھئے)



شکل 5.8

یہاں آپ کو کچھ عملیات کرنی ہیں، یوکلڈ کے موضوعہ 3 کو استعمال کرتے ہوئے A کو مرکز مان کر اور AB نصف قطر لیکر آپ ایک دائرہ بنا سکتے ہیں، اسی طرح سے B کو مرکز مان کر اور BA نصف قطر لے کر ایک دوسرا دائرہ بنائیے۔ دونوں دائرہ نقطہ C پر ملتے ہیں اب ΔABC بنانے کے لئے قطعات خطوط AC اور BC بنائیے شکل (iii)5.8 دیکھیے)۔

اب آپ کو یہ ثابت کرنا ہے کہ یہ مساوی ضلعی مثلث ہے یعنی $AB = AC = BC$

اب $AB = AC$ کیونکہ یہ ایک ہی دائرہ کے نصف قطر ہیں

اسی طرح سے $AB = BC$ ایک ہی دائرہ کے نصف قطر ہیں

ان دو حقیقتوں اور یوکلڈ کے پہلے مدیحہ (چیزیں جو ایک ہی چیز کے مساوی ہوں آپس میں مساوی ہوتی ہیں) آپ یہ نتیجہ اخذ کر سکتے ہیں کہ $AB=BC=AC$ ایک مساوی ضلعی مثلث ہے۔ مان کر بنائیے۔

نوٹ کیجئے کہ یہاں یوکلڈ نے مانا ہے کسی جگہ بیان کئے بغیر کہ A اور B کو مرکز بتائے گئے دو دائرہ ایک نقطہ پر ملتے ہیں۔

آیئے اب ہم اس مسئلہ کو ثابت کرتے ہیں جو مختلف نتائج میں اکثر استعمال ہوتا ہے۔

مسئلہ 5.1: دو مختلف خطوط میں ایک سے زیادہ مشترک نقطہ نہیں ہوسکتا۔

ثبوت: یہاں ہمیں دو خطوط l اور m دیئے ہوئے ہیں ہمیں یہ ثابت کرنے کی ضرورت ہے کہ ان خطوط میں صرف ایک نقطہ مشترک ہے۔

وقتی طور پر یہ مان لیجئے کہ دو خطوط دو مختلف نقطوں P اور Q پر قطع کرتے ہیں اس لئے آپ کے پاس P اور Q سے گذرتے ہوئے دو خطوط ہیں، لیکن یہ مفروضہ بدیحہ سے ٹکراتا ہے جو یہ ہے کہ دو مختلف نقطوں سے صرف ایک ہی خط گذر سکتا ہے اس لئے شروع میں لیا گیا مفروضہ کہ دو مختلف نقطوں سے دو خطوط گذر سکتے ہیں، غلط ہے۔

اس سے ہم یہ نتیجہ اخذ کرتے ہیں کہ دیئے ہوئے دو مختلف نقطوں سے صرف ایک خط بنایا جا سکتا ہے۔

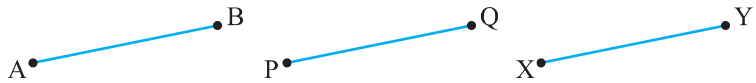
مشق 5.1

1. مندرجہ ذیل بیانات میں کون سے درست ہیں اور کون سے غلط؟ اپنے جوابات کی وجوہات بتائیے
   (i) ایک واحد نقطہ سے صرف ایک خط گذر سکتا ہے
   (ii) دو مختلف نقطوں سے لامحدود خطوط کھینچے جا سکتے ہیں

(iii) ایک ختم ہونے والے خط کو دو طرف لامحدود طور پر بڑھا سکتے ہیں

(iv) اگر دو دائرہ مساوی ہیں تو ان کے نصف قطر بھی مساوی ہونگے

(v) شکل 5.9 میں اگر $AB = PQ$ اور $PQ = XY$ تب $AB = XY$



شکل 5.9

2. مندرجہ ذیل ہر ایک رکن کی تعریف بیان کیجئے کیا کچھ اور بھی رکن ہیں جن کی تعریف کرنے کی ضرورت پہلے ہے؟ وہ کیا ہیں اور آپ ان کی تعریف کیسے کریں گے۔

(i) متوازی خطوط (ii) عمودی خطوط (iii) قطع خط

(iv) نصف قطر (v) مربع

3. نیچے دیئے گئے دو موضوعوں پر غور کیجئے

(i) A اور B دو نقطے دیئے ہوئے ہیں ایک اور نقطہ C بھی موجود ہے جو A اور B کے درمیان ہے۔

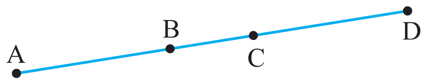
(ii) کم سے کم ایسے تین نقطے ہیں جو ایک ہی خط پر واقع نہیں ہیں۔

کیا ان موضوعات میں کوئی غیر معرف رکن ہیں؟ کیا یہ موضوعات تابع ہیں؟ کیا یہ یوکلڈ کے موضوعات میں سے ہیں؟ تشریح کیجئے

4. اگر ایک نقطہ C، A اور B کے درمیان اس طرح ہے کہ $AC = BC$ تو ثابت کیجئے کہ $AC = \frac{1}{2}AB$ - شکل بنا کر تشریح کیجئے۔

5. سوال 4 میں نقطہ C قطعہ خط AB کا وسطی نقطہ کہلاتا ہے۔ ثابت کیجئے کہ ہر قطع خط کا ایک اور صرف ایک وسطی نقطہ ہوتا ہے۔

6. شکل 5.10 میں اگر $AC=BD$ ہو تو ثابت کیجئے کہ $AB=CD$



شکل 5.10

7. اقلیدس کے بدیہات کی فہرست میں پانچواں بدیہہ کیوں کائناتی سچ مانا جاتا ہے۔نوٹ کیجئے کہ سوال پانچویں موضوعہ کے بارے میں نہیں۔

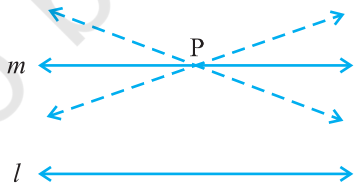
5.3 اقلیدس کے پانچویں موضوعہ کے معادل نظریات

(Equivalent Versions of Euclid's fifth Postulate)

ریاضی کی تاریخ میں اقلیدس کا پانچواں موضوعہ بڑی اہمیت کا حامل ہے، آئیے اس کو دہراتے ہیں ہم اس کے اطلاق پر دیکھتے ہیں کہ اگر قاطع خط کے ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں کا حاصل جمع 180° ہو تو باقی دونوں خط ایک دوسرے کو کبھی نہیں قطع کریں گے اسی موضوعہ کے بہت سے معادل نظریہ ہیں جس میں ایک پلے فیر بدیہہ ہے جو اسکاٹ لینڈ کے ایک ریاضی داں (John Playfair نے 1729 میں دیا ہے) جو مندرجہ ذیل ہے۔

ہر ایک خط l اور ہر ایک نقطہ P جو l پر واقع نہیں ہے کے لئے ایک یکتا (unique) خط m ہے جو P سے گذرتا ہے اور l کے متوازی ہوتا ہے۔

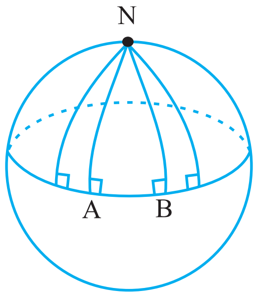
شکل 5.11 میں آپ دیکھ سکتے ہیں کہ P سے گذرنے والے تمام خطوط میں صرف خط m خط l کے متوازی ہے۔



شکل 5.11

اس نتیجہ کو ہم مندرجہ ذیل شکل میں بھی بیان کر سکتے ہیں۔

دو مختلف قاطع خطوط ایک ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے۔



شکل 5.12

اقلیدس کو اپنے پہلے 28 مسئلوں کو ثابت کرنے کے لئے پانچویں موضوعہ کی ضرورت نہیں ہوئی۔ اس سمیت دوسرے ریاضی داں بھی اس بات پر متفق تھے کہ پانچواں موضوعہ ایک مسئلہ ہے جس کو پہلے چار موضوعات اور دوسرے بدیہات کی مدد سے ثابت کیا جا سکتا ہے۔ حالانکہ پانچویں موضوعہ کو ایک مسئلہ کے طور پر ثابت کرنے کی ساری کوششیں بیکار ثابت ہوئیں، لیکن ان کوششوں سے اور بہت سی اہم باتیں پتہ چلیں۔ یعنی دوسری بہت سی جیومیٹریوں کی تخلیق جو اقلیدس جیومیٹری سے کافی مختلف ہیں جو غیر اقلیدس جیومیٹریاں کہلاتی ہیں، یہ تخلیق ریاضی کی تاریخ میں ایک سنگ میل کی حیثیت رکھتی ہے کیونکہ اس وقت دنیا صرف اقلیدس کی جیومیٹری کے بارے میں جانتی تھی اب کائنات کی یہ جیومیٹری جس میں ہم رہتے ہیں غیر اقلیدس جیومیٹری ہے۔ درحقیقت یہ کرّوی جیومیٹری (Spherical) کہلاتی ہے۔ کرّوی جیومیٹری میں خطوط منقسم نہیں ہیں۔ یہ بڑے دائروں کے حصہ میں انھیں دائروں کو اب ہمہ گیر اور کرّہ کے مرکز سے گذرتے ہوئے مستوی کے تقاطع سے حاصل کر سکتے ہیں۔

شکل 5.12 میں خطوط AN اور BN (جو کرّہ کے بڑے دائروں کے حصہ میں) ایک ہی خط AB پر عمود ہیں جو ایک دوسرے سے مل رہے ہیں جب کہ خط AB کے ایک ہی طرف کے زاویوں کا حاصل جمع زاویہ قائمہ سے کم نہیں ہے۔ (اصل میں یہ $90 + 90 = 180$ ہے) مزید نوٹ کیجئے کہ مثلث NAB کے زاویوں کا حاصل جمع 180 سے زیادہ ہے کیونکہ $\angle A + \angle B = 180^\circ$ ہے، اس لئے اقلیدس کی جیومیٹری صرف مستوی اشکال کے لئے درست ہے، منحنی سطحوں میں یہ فیل ہو جاتی ہے۔

آیئے ایک مثال پر غور کرتے ہیں۔

مثال 3: مندرجہ ذیل بیان پر غور کیجئے: خط مستقیم کا ایک ایسا جوڑا موجود ہے جو ہر جگہ ایک دوسرے سے برابر فاصلہ پر ہوتا ہے، کیا یہ بیان اقلیدس کے پانچویں موضوعہ کا سیدھا نتیجہ ہے؟ تشریح کیجئے۔

حل: کوئی خط l لیجئے اور ایک نقطہ P جو l پر نہیں ہے تب Playfair's بدیہہ کے مطابق جو پانچویں موضوعہ کے معادل ہے ہم جانتے ہیں کہ P سے گذرتا ہوا ایک یکتا خط جو l کے متوازی ہے۔

اب کسی خط سے کسی نقطہ کا فاصلہ اس نقطہ سے اس خط پر عمود کی لمبائی ہے l سے m کے کسی نقطہ تک یہ فاصلہ یکساں ہوگا۔ اس لئے یہ خطوط ایک دوسرے سے ہر جگہ برابر فاصلے پر ہیں۔

ریمارک: یہ بات نوٹ کیجئے کہ اگلے کچھ بابوں میں آپ جس جیومیٹری کے بارے میں پڑھیں گے اقلیدس کی جیومیٹری ہے، جبکہ مسئلہ اور بدیحات جو ہم استعمال کریں گے اقلیدس سے مختلف ہونگے۔

مشق 5.2

1. اقلیدس کے پانچویں موضوعہ کو آپ دوبارہ کس طرح لکھیں گے تاکہ یہ آسانی سے سمجھا جاسکے؟
2. کیا اقلیدس کا پانچواں موضوعہ متوازی خطوط کے وجود کے دلائل پیش کرتا ہے؟ تشریح کیجئے

5.4 خلاصہ (Summary)

اس باب میں آپ نے مندرجہ ذیل باتیں سیکھیں

1. حالانکہ اقلیدس نے نقطہ خط اور مستوی کی تعریف بیان کی ہے لیکن ریاضی دانوں نے اس کو نہیں مانا۔ اس لئے اب جیومیٹری میں یہ غیر معروف رکن کے طور پر استعمال ہوتی ہے۔
2. بدیحات اور موضوعات وہ مفروضات ہیں جو واضح کائناتی سچ ہیں۔ ان کو ثابت نہیں کیا گیا۔
3. مسئلہ وہ مفروضات ہیں جن کو تعریفوں، بدیحات، پچھلے ثابت کئے گئے بیانوں اور استخراجی منطق کے استعمال سے ثابت کیا گیا ہے۔
4. اقلیدس کے بدیحات تھے

(1) چیزیں جو کسی ایک ہی چیز کے مساوی ہوں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

(2) اگر مساوی چیزوں میں مساوی چیزیں جمع کی جائیں تو حاصل شدہ چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔

(3) اگر مساوی چیزیں مساوی چیزوں میں سے گھٹائی جائیں تو باقی چیزیں بھی مساوی ہوتی ہیں۔

(4) چیزیں جو ایک دوسرے پر منطبق ہوں آپس میں مساوی ہوتی ہیں۔

(5) مکمل حصہ سے بڑا ہوتا ہے

(6) چیزیں جو کسی ایک ہی چیز کا دوگنا ہوتی ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

(7) چیزیں جو کسی ایک ہی چیز کی آدھی ہوتی ہیں ایک دوسرے کے مساوی ہوتی ہیں۔

5 اقلیدس کے موضوعات تھے

موضوعہ 1: ایک نقطہ سے دوسرے نقطہ تک ایک خط مستقیم کھینچا جا سکتا ہے۔

موضوعہ 2: ایک ختم ہونے والے خط کو لامحدود طور پر بڑھایا جا سکتا ہے۔

موضوعہ 3: کسی بھی مرکز اور نصف قطر کا دائرہ بنایا جا سکتا ہے۔

موضوعہ 4: تمام قائم زاویہ ایک دوسرے کے مساوی ہوتے ہیں۔

موضوعہ 5: اگر ایک خط مستقیم دو خطوط مستقیم کو اس طرح قطع کرتا ہے کہ ایک ہی طرف کے داخلی زاویوں، اگر ایک ساتھ لیں، دو زاویہ قائمہ سے کم ہوں تو دونوں خطوط اگر انھیں لامحدود طور پر بڑھایا جائے وہ اس طرف ملتے ہیں جہاں زاویہ دو زاویہ قائمہ سے کم ہیں۔

6. اقلیدس کے پانچویں موضوعہ کے معادل دو نظریہ ہیں

(i) ہر ایک خط l اور ہر ایک نقطہ P جو l پر واقع نہیں ہے کے لئے ایک یکتا خط m ہے جو P سے گذرتا ہے اور l کے متوازی ہوتا ہے۔

(ii) دو مختلف قاطع خطوط ایک ہی خط کے متوازی نہیں ہو سکتے۔

7 اقلیدس کے پانچویں موضوعہ کو پہلے 4 موضوعوں کے استعمال سے ثابت کرنے کی تمام کوششیں ناکام ہوئیں لیکن ان کی وجہ سے دوسری بہت سی جیومیٹریاں دریافت ہوئیں جو غیر اقلیدس جیومیٹریاں کہلائیں۔